Zur p-adischen Uniformisierung von Kurven

DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
HUGO ULLRICH
aus Obersissigheim

Bochum 1981

Zur p-adischen Uniformisierung von Kurven

DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von

HUGO ULLRICH
aus Obersissigheim

Bochum 1981

Referent: Prof. Dr. L. Gerritzen

Korreferent: Prof. Dr. W. Bartenwerfer

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Kap. I: Affinoide Teilbereiche des $\mathbb{P}^1_k$ 1

§1: Koordinaten 1

§2: s-fach gelochte Scheiben 15

Kap. II: Lokal einfache analytische Räume 23

§3: Separiert verheftete Scheiben 28

§4: Überdeckungseigenschaften 38

§5: Fundamentalgruppe 44

Kap. III: Die universelle Überlagerung als unbeschränktes Steinsches Gebiet von $\mathbb{P}^1_k$ 48

§6: Die universelle Überlagerung als Steinscher Raum 52

§7: Einbettung in den $\mathbb{P}^1_k$ 58

§8: Mumford Kurven 67

Kap. IV: Anwendungen auf zyklische Galois Erweiterungen von $k(x)$ 71

§9: Wurzeln von Polynomen auf affinoiden Teilbereichen des $\mathbb{P}^1_k$ 75

§10: Verteilung der kritischen Punkte 80

Literaturverzeichnis

Einleitung

Eine p-adische Mumford-Kurve ist eine nichtsinguläre projektiv algebraische Kurve über einem p-adischen Grundkörper k (der immer algebraisch abgeschlossen und vollständig bewertet sein soll), die als Quotientenraum einer Operation einer p-adischen Schottky-Gruppe (eine diskontinuierliche Gruppe gebrochen linearer Transformationen) auf einem zugehörigen unbeschränkten Steinschen Gebiet des eindimensionalen projektiven Raumes über k dargestellt werden kann.

In der komplexen Funktionentheorie kann jede Kurve uniformisiert werden. Ist das Geschlecht der Kurve $g > 1$ (bzw. $g = 1$), so entspricht die Kurve einem Quotienten des offenen Einheitskreises (bzw. der komplexen Ebene) nach einer Gruppe gebrochen linearer Transformationen.

In der p-adischen Funktionentheorie ist im Gegensatz dazu nicht jede Kurve eine Mumford-Kurve. J. Tate zeigte, daß eine elliptische Kurve genau dann durch eine Schottky-Gruppe uniformisiert werden kann, wenn der Betrag ihrer j-Invarianten größer als 1 ist. Für höheres Geschlecht entwickelte D. Mumford 1972 in [18] mit Methoden der formellen Geometrie eine allgemeine Uniformisierungstheorie für p-adische Kurven, die eine Grundlage für alle weiteren Arbeiten bildete. In [6] zeigte L. Gerritzen mit Mitteln der p-adischen Funktionentheorie, daß der Bahnenraum einer Schottky-Gruppe Γ vom Rang g eine nichtsinguläre projektiv algebraische Kurve vom Geschlecht g ist, die als p-adische Riemannsche Fläche eine endliche Überdeckung durch affinoide Teilbereiche des $\mathbb{P}^1_k$ besitzt.

Die ersten drei Kapitel der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich mit der Umkehrung dieses Satzes, nämlich damit, daß Mumford-Kurven durch diese Eigenschaft, daß sie als p-adische Riemannsche Flächen einen sochen Atlas besitzen, vollkommen charakterisiert werden, (Hauptsatz, Seite 24).

Dieser Sachverhalt wurde inzwischen auch von M. van der Put in [9] dargestellt, indem er analytische Reduktionen algebraischer Kurven untersuchte. Im Gegensatz dazu sind die Lemmata und Sätze, die hier zum Beweis des Hauptsatzes formuliert werden, durch elementares Vorgehen mit Methoden der p-adischen Funktionentheorie gekennzeichnet. Zusätzlich werden in der Arbeit noch Hilfsmittel der kombinatorischen Topologie und der algebraischen Geometrie verwendet.

Im ersten Kapitel werden die Grundbausteine von Mumford-Kurven, die affinoiden Teilbereich des $\mathbb{P}^1_k$, untersucht (insbesondere als wichtige Invarianten die Radienverhältnisse), um sie im zweiten Kapitel zu k-analytischen Räumen zu verheften. Es werden dabei nur zusammenhängende, separierte, geschlossen k-analytische Räume betrachtet, von denen nachgewiesen wird, daß sie irreduzible Mumford-Kurven sind. Im Mittelpunkt stehen Lemma 3.1 und Satz II.1, die die Möglichkeit geben, eine Überdeckung aus affinoiden Teilbereichen des $\mathbb{P}^1_k$ zu konstruieren, deren 2-Nerv verschwindet, so daß der k-analytische Raum im wesentlichen durch einen Graphen beschrieben werden kann, den man auf kanonische Weise aus solch einer ausgezeichneten Überdeckung erhält.

Im dritten Kapitel wird die universelle Überlagerung zu den angegebenen k-analytischen Räumen konstruiert. Die 'topologische Struktur' wird durch eine Grothendieck-Topologie gegeben, einem System von zulässigen Überdeckungen aus zulässig offenen Mengen. Für Räume, die eine solche Struktur tragen, wurde in meiner Diplomarbeit [22] eine allgemeine Überlagerungstheorie hergeleitet, auf die an dieser Stelle zurückgegriffen wird. Der Satz II.1 bildet die Grundlage für die anschließende Einbettung der universellen Überlagerung als unbeschränktes Steinsches Gebiet von $\mathbb{P}^1_k(x)$. Die 'globale Koordinate' x wird dabei konkret durch einen Approximationsprozeß angegeben. Die Unbeschränktheit erhält man durch Abschätzungen der auftretenden Radienverhältnisse in der zuvor konstruierten Steinschen Ausschöpfungsfolge affinoider Teilbereiche des $\mathbb{P}^1_k$. Anschließend wird gezeigt, daß die Wegegruppe des im §4 konstruierten Graphen als Schottky-Gruppe aufgefaßt werden kann und die eingebettete universelle Überlagerung als Bereich der zugehörigen gewöhnlichen Punkte, um den Beweis des Hauptsatzes damit abzuschließen.

Im letzten Kapitel wird dieses Resultat dazu verwendet, um für Kurven, deren 'endlicher Teil' durch eine Gleichung der Form

$$y^n = P(x) ,$$

$P(x) \in k[x]$, gegeben ist, eine Aussage zu machen, wann sie Mumford-Kurven sind. Dabei werden die Kurven als verzweigte Überlagerungen des $\mathbb{P}^1_k$ dargestellt und die Verteilung der kritischen Punkte untersucht.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und die Betreuung bei ihrer Durchführung bin ich Herrn Prof. Dr. L. Gerritzen sehr dankbar.

Kapitel I: AFFINOIDE TEILBEREICHE DES $\mathbb{P}^1_k$

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener, nichtarchimedisch, nicht trivial und vollständig bewerteter Körper. Mit $\mathbb{P}^1_k = k \cup \{\infty\}$ bezeichnen wir den eindimensionalen projektiven Raum über k.

§1. Koordinaten

Eine Teilmenge des $\mathbb{P}^1_k$ der Form

$$K = \{x \in \mathbb{P}^1_k \mid |x - a| \leq (\text{bzw. } \geq) r\},\ a \in k,\ r \in |k-\{0\}| \subset \mathbb{R}_+$$

nennen wir eine affinoide Kreisscheibe und $\mathbb{P}^1_k - K$ einen offenen Kreis des eindimensionalen projekten Raumes.
Die analytische Struktur des $\mathbb{P}^1_k$ wird durch endliche Überdeckungen des $\mathbb{P}^1_k$ durch affinoide Teilbereiche des $\mathbb{P}^1_k$ bestimmt. Nach [10], §5 lassen sich diese Teilbereiche als Durchschnitt affinoider Kreisscheiben darstellen. Sind deshalb $K_o, \ldots, K_s$ affinoide Kreisscheiben des $\mathbb{P}^1_k$ mit paarweise disjunkten offenen Kreisen $\mathbb{P}^1_k - K_o, \ldots, \mathbb{P}^1_k - K_s$, so heißt

$$X := \bigcap_{i=o}^{s} K_i$$

zusammenhängender affinoider Teilbereich des $\mathbb{P}^1_k$ vom Rang s + 1. Die affinoiden Kreisscheiben sind eindeutig durch X bestimmt und paarweise komaximal, das heißt

$$K_m \cup K_n = \mathbb{P}^1_k \text{ für } m \neq n.$$

Da affinoide Kreisscheiben durch Automorphismen des $\mathbb{P}^1_k$, den gebrochen linearen Transformationen, wieder in affinoide Kreisscheiben übergeführt werden, geschieht dies auch mit zusammenhängenden affinoiden Teilbereichen.

Wir können also stets von einer Darstellung

$$K_o = \{x \mid |x| \leq 1\} \text{ und}$$
$$K_m = \{x \mid |x - a_m| \leq |\varepsilon_m|\} \quad a_m, \varepsilon_m \in k,\ 1 \leq m \leq s$$

ausgehen. Die Komaximalität der Kreisscheiben bewirkt

$$|a_m|,\ |\varepsilon_m| \leq 1 \text{ und } |\varepsilon_m| \leq |a_m - a_n| \leq 1 \text{ für alle } m \neq n.$$

Die Algebra der holomorphen Funktionen auf K_i, $A(K_i)$, ist die Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen in

$$x_i := \frac{\varepsilon_i}{x - a_i} \text{ für } i > 0 \text{ bzw. } x_o := x \text{ für } i = 0$$

$$k\langle x_i\rangle = \{f = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x_i^\nu,\ \lim_{\nu\to\infty} |b_\nu| = 0\}.$$

$A(K_i)$ ist eine Banachalgebra bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf K_i:

$$\|f\|_{K_i} = \sup_{x\in K_i} |f(x)| = \max_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|.$$

Für die Banachalgebra der holomorphen Funktionen auf X, A(X), mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz $\|\ \|_X$ gilt folgender

Satz ([7]), Satz 2): Jede holomorphe Funktion f auf X besitzt eine eindeutige Darstellung

$$f = C + f_o + \ldots + f_s,$$
$$\text{mit } C \in k,\ f_i = \sum_{\nu\geq 1} b_{\nu i} x_i^\nu \in k\langle x_i\rangle$$

und es gilt:

$$\|f\|_X = \max_{i=o}^{s} \{\|f_i\|_{K_i},\ |C|\}.$$

Wir schreiben A(X) als Quotient der Algebra der strikt

konvergenten Potenzreihen in s + 1 Variablen in der Form:

$$A(X) = k\langle x_0, \ldots, x_s \rangle$$

mit den Partialbruchgleichungen

$$(*) \quad \begin{aligned} x_o \cdot x_i &= a_i x_i + \varepsilon_i \quad \text{für } i \neq 0 \\ x_i \cdot x_j &= \frac{\varepsilon_i}{a_j - a_i} \cdot x_j + \frac{\varepsilon_j}{a_i - a_j} \cdot x_i \quad \text{für } i \neq j;\ i, j > 1. \end{aligned}$$

Da $k\langle x \rangle = k\langle x - a \rangle$ für $|a| \leq 1$ ist, können wir für A(X) von einer Darstellung

$$k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{x - a_s} \rangle$$

mit $a_1 = 0$ ausgehen. Diese Form werden wir bei allgemeinen Betrachtungen heranziehen und sie als eine Standarddarstellung von A(X) bezeichnen.

Schreiben wir wie oben jedes x_j, $j \geq 1$, als einen gebrochen linearen Ausdruck in x_o, $\frac{\varepsilon_j}{x_o - a_j}$, so gibt $|\varepsilon_j|$ das 'Radienverhältnis' der affinoiden Kreisscheibe K_j zur Kreisscheibe K_o an. Wir können aber auch jedes x_j als einen gebrochen linearen Ausdruck in x_i schreiben, $i \neq 0$:

$$x_o = \frac{\varepsilon_i}{x_i} + a_i$$

$$x_j = \frac{\frac{\varepsilon_j}{a_i - a_j} \cdot x_i}{x_i + \frac{\varepsilon_i}{a_i - a_j}} \qquad j \neq i,\ j > 0.$$

Setzen wir

(1) $a_{oi} := 0, \qquad a_{ji} := \frac{\varepsilon_i}{a_j - a_i} \quad i \neq j,\ j > 0,$

(2) $\varepsilon_{oi} := \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_{ji} := a_{ji} \cdot a_{ij} \quad i \neq j,\ j > 0$

und

(*)(3) $x_{oi} := x_o - a_i, \quad x_{ji} := x_j - a_{ij} \quad i \neq j,\ j > 0,$

so erhalten wir, da $|a_i|$, $|a_{ij}| \leq 1$ ist, für $x_{ii} := x_i$

$$k\langle x_j\rangle = k\langle x_{ji}\rangle \quad \text{für } 0 \leq j \leq s$$

und

$$x_{oi} = \frac{\varepsilon_{oi}}{x_i} \quad \text{bzw.}$$

$$x_{ji} = \frac{\varepsilon_{ji}}{x_i - a_{ji}} \quad \text{für } i \neq j, \text{ so daß}$$

$A(X) = k\langle x_{oi}, \ldots, x_i, \ldots, x_{si}\rangle$ ist.

Definition: Wir nennen $r_{ji} := |\varepsilon_{ji}|$ für $j \neq i$ das Radienverhältnis der j-ten zur i-ten definierenden Kreisscheibe von X.

Setzen wir $r_{jj} := 1$ für alle j, so erhalten wir durch leichte Rechnungen, daß die oben definierten Radienverhältnisse in $\mathbb{P}^1_k$ nur von der Numerierung der definierenden Kreisscheiben abhängen und

(a) $r_{ji} = r_{ij}$

(b) $0 < r_{ji} \leq 1$

(c) $r_{ij} \cdot r_{jk} \leq r_{ik}$ gilt für $0 \leq i, j \leq s$.

Bemerkung: Setzen wir $d(i,j) := -\log r_{ij}$, so erhalten wir einen archimedischen Abstand auf der Menge der X definierenden Kreisscheiben, der ein Maß für die 'Ausdehnung' des Teilbereiches ist.

Beispiele: (1) $A(X) = k\langle x, \frac{1}{x}\rangle$, $d(0, 1) = 0$;

(2) $A(X) = k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \frac{\varepsilon_2}{x - a_2}\rangle$ mit

$$0 < |\varepsilon_2| < |\varepsilon_1|^2 < |a_2|^2 < |\varepsilon_1| < 1,$$

so ist $d(0, 1) < d(1, 2) < d(0, 2)$. Die Kreisscheiben K_0, K_1 und K_2 bilden ein 'archimedisches' Dreieck.

Für $\mathbb{P}^1_k$ werden wir immer präziser $\mathbb{P}^1_k(x)$ schreiben, wobei x eine einfach rationale Funktion auf $\mathbb{P}^1_k$ darstellt. $\mathbb{P}^1_k(x)$ identifizieren wir mit den Stellen des rationalen Funktionenkörpers k(x).
Da wir k algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt haben, entspricht jeder Stelle genau ein Element aus $k \cup \{\infty\}$, dem Punkt $a \in k$ der Stellenring $k[x]_{(x-a)}$ und dem Punkt ∞ der Stellenring $k[x^{-1}]_{(x^{-1})}$ wie wir beispielsweise [4], Kapitel 1 entnehmen.

Definition: Wir nennen $z \in A(X)$ eine Koordinate auf X, falls

$$z_o := z,\ z_1 := \frac{\delta_1}{z - b_1}, \ldots,\ z_t := \frac{\delta_t}{z - b_t},\ \delta_i,\ b_i \in k,$$

existieren, so daß

$$A(X) = k\langle z_o, \ldots, z_t\rangle \text{ ist.}$$

Ist z eine Koordinate auf X, so ist $X \subset \mathbb{P}^1_k(z)$ und die definierenden Kreise sind $K_i(z_i) := \{z \in \mathbb{P}^1_k(z) \mid |z_i(z)| \leq 1\} \subset \mathbb{P}^1_k(z)$.
Das Ziel dieses Paragraphen ist es, die Gesamtheit aller Koordinaten zu beschreiben. Ein wesentliches Hilfsmittel ist die affine Reduktion [11], [12].
Bezeichnen wir mit

$$\mathring{k} = \{a \in k \mid |a| \leq 1\},\ t(\mathring{k}) = \{a \in k \mid |a| < 1\}$$
$$\mathring{A}(X) = \{f \in A(X) \mid \|f\|_X \leq 1\},\ t(\mathring{A}(X)) = \{f \in A(X) \mid \|f\|_X < 1\},$$

so nennen wir $\bar{k} = \mathring{k}/t(\mathring{k})$ den Restklassenkörper von k und $\bar{A} = \mathring{A}/t(\mathring{A})$ die affine Reduktion von A. $\bar{A}$ ist eine $\bar{k}$-affine Algebra. Die algebraische Abgeschlossenheit von k überträgt sich auf $\bar{k}$. Bezeichnen wir mit $\overline{z_i}$ die Restklasse von z_i modulo $t(\mathring{A})$, so ist die affine Reduktion von $A(X) = k\langle z_o, \ldots, z_t\rangle$ die Algebra $\bar{A} = \bar{k}[\overline{z_o}, \ldots, \overline{z_t}]$. Da k algebraisch abgeschlossen ist, sind die Funktionen $\overline{z_o}, \ldots, \overline{z_t}$ und deren Potenzen linear unabhängig über $\bar{k}$ ([9], Seite 42).

Das nachfolgende Lemma zeigt, daß sich Koordinaten eines zusammenhängenden affinoiden Teilbereiches bis auf geeignete Numerierung in der Reduktion nicht sehr unterscheiden und die Radienverhältnisse Invarianzeigenschaften aufweisen.

Lemma 1.1: Seien x und z Koordinaten auf X und sei

$$A = k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{x - a_s}\rangle = k\langle z, \frac{\delta_1}{z}, \ldots, \frac{\delta_t}{z - b_t}\rangle .$$

Mit r_{ij} bzw. R_{mn} seien die Radienverhältnisse von X in $\mathbb{P}^1_k(x)$ bzw. $\mathbb{P}^1_k(z)$ bezeichnet. Es gilt:

(1) $s = t$

(2) Es gibt eine Permutation σ der Zahlen $0, \ldots, s$, so daß in $\bar{A}$ für jedes i, $0 \leq i \leq s$, eine Gleichung

$$z_i = \alpha_i x_{\sigma(i)} + \zeta_i$$

existiert mit $\alpha_i, \zeta_i \in \bar{k}$, $\alpha_i \neq 0$.

(a) Ist $\sigma(0) = 0$, so folgt $\zeta_i = 0$ für $i > 0$.

(b) Gilt zusätzlich $\sigma(1) = 1$, so ist $\zeta_i = 0$ für alle i.

(3) $R_{ij} = r_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Beweis: Wir beweisen zuerst die Aussagen (1) und (2).

Der Übergang zur affinen Reduktion ergibt

$$\tilde{k}[\bar{x}, \frac{\overline{\varepsilon_1}}{\bar{x}}, \ldots, \frac{\overline{\varepsilon_s}}{\bar{x} - a_s}] = \tilde{k}[\bar{z}, \frac{\overline{\delta_1}}{\bar{z}}, \ldots, \frac{\overline{\delta_t}}{\bar{z} - b_t}] .$$

Die z_i erfüllen wie die x_i die Partialbruchgleichungen (*):

$$z_0 \cdot z_1 = \delta_1$$

$$z_0 \cdot z_i = b_i \cdot z_i + \delta_i \qquad i > 1$$

$$z_1 \cdot z_i = -\frac{\delta_i}{b_i} z_1 + \frac{\delta_1}{b_1} z_i \qquad i > 1$$

$$z_i \cdot z_j = \frac{\delta_j}{b_i - b_j} z_i + \frac{\delta_i}{b_j - b_i} z_j \qquad i \neq j;\ i, j > 1.$$

In $\bar{A}$ haben wir für jedes i, $0 \leq i \leq t$, eine Gleichung

$$\overline{z_i} = p_{io}(\overline{x_o}) + \ldots + p_{is}(\overline{x_s}) + \zeta_i$$

mit $p_{im} \in \bar{k}[\overline{x_m}]$ ohne absolutes Glied und $\zeta_i \in \bar{k}$.
Betrachten wir

$$\overline{z_i} \cdot \overline{z_j} = -\zeta_i\zeta_j + \zeta_i\overline{z_j} + \zeta_j\overline{z_i} + \sum_{1,k=o}^{s} p_{ik} \cdot p_{jl} \text{ für } i \neq j,$$

so folgt aus den Partialbruchgleichungen für
Konstanten $\zeta, \zeta', \zeta'' \in \bar{k}$

$$\zeta\overline{z_j} + \zeta' \cdot \overline{z_i} + \zeta'' = \sum_{1,k=o}^{s} p_{ik}p_{jl}.$$

Da $\bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und damit insbesondere nicht endlich ist, sind die Elemente $\overline{x_o}, \ldots, \overline{x_o}^{\nu_o}, \ldots, \overline{x_s}, \ldots, \overline{x_s}^{\nu_s}$ für $\nu_i \geq 1$ über $\bar{k}$ linear unabhängig und somit folgt aus Gradgründen

$$p_{im} \cdot p_{jm} = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Da $\overline{z_i} \notin \bar{k} \subset \bar{A}$ ist, gibt es mindestens ein m =: $\sigma(i)$ mit $p_{im} \neq 0$. Da $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ sein muß, haben wir $t \leq s$ und damit auch $t = s$, da die ganze Argumentation symmetrisch in x und z verläuft. Da nun $p_{j\sigma(i)} = 0$ ist für $j \neq i$, erhalten wir

$$\overline{z_i} = p_{\sigma(i)} + \zeta_i$$

mit $p_{\sigma(i)} \in \bar{k}[\overline{x}_{\sigma(i)}]$ für eine Permutation σ der Zahlen $0,\ldots,s$. Jedes $\overline{x_i}$ läßt sich auch als Polynom in einem $\overline{z_j}$ ausdrücken, dementsprechend muß $p_{\sigma(i)}$ linear sein:

$$\overline{z_i} = \alpha_i \cdot \overline{x}_{\sigma(i)} + \zeta_i, \ \alpha_i \in \bar{k} - \{0\}.$$

Ist nun $\sigma(0) \neq 0$, so zeigen wir, daß $\zeta_i = 0$ ist für $i > 0$.

Wir betrachten die reduzierte Partialbruchgleichung

$$\overline{z_o} \cdot \overline{z_i} = \overline{b_i} \cdot \overline{z_i} + \overline{\delta_i}$$
$$= \overline{b_i}\alpha_i \bar{x}_{\sigma(i)} + \zeta, \ \zeta \in \bar{k}$$

und von oben

$$\overline{z_o} \cdot \overline{z_i} = (\alpha_o \cdot \bar{x}_{\sigma(o)} + \zeta_o)(\alpha_i \bar{x}_{\sigma(i)} + \zeta_i)$$
$$= \zeta' \bar{x}_{\sigma(i)} + \zeta_i \alpha_o \bar{x}_o + \zeta'', \quad \zeta', \zeta'' \in \bar{k}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $\overline{x_j}$, $0 \leq j \leq s$, folgt damit $\zeta_i = 0$ für $i > 0$.

Sei zusätzlich $\sigma(1) = 1$.

Aus den Gleichungen $\bar{z} = \alpha_o \bar{x} + \zeta_o$ und $(\overline{\frac{\delta_1}{z}}) = \alpha_1 (\overline{\frac{\varepsilon_1}{x}})$ folgt durch Multiplikation

$$\overline{\delta_1} = \alpha_o \alpha_1 \overline{\varepsilon_1} + \zeta_o \alpha_1 (\overline{\frac{\varepsilon_1}{x}}).$$

Da $\alpha_1 \neq 0$ ist, folgt somit $\zeta_o = 0$.

Wir beweisen die dritte Aussage, indem wir für $\sigma = id$ zeigen, daß $|\varepsilon_1| = |\delta_1|$ ist. Die anderen Fälle folgen analog.
Aus $(\overline{\frac{\varepsilon_1}{x}}) = \alpha_1 (\overline{\frac{\delta_1}{z}})$ folgt, daß

$Y := \{x \in X \mid |x| = |\varepsilon_1|\} = \{x \in X \mid |z| = |\delta_1|\} \subset X$ ist mit $A(X) \subset A(Y)$.

In $\overline{A(Y)}$ gilt nach oben $(\overline{\frac{x}{\varepsilon_1}}) = \alpha_o' (\overline{\frac{z}{\delta_1}})$, da sicherlich $(\overline{\frac{\varepsilon_1}{x}}) = \alpha_1' (\overline{\frac{\delta_1}{z}})$ ist.

In $A(X)$ haben wir eine Gleichung der Form

$$x = a_o z + \eta$$

mit $\bar{a}_o = \alpha_o$ und $\|\eta\|_X < 1$ und somit auch

$$(*) \quad \frac{x}{\varepsilon_1} = a_o \frac{\delta_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{z}{\delta_1} + \frac{\eta}{\varepsilon_1}.$$

Diese Gleichung gilt auch in A(Y). Da $\|\ \|_Y \leq \|\ \|_X$ ist und $\|\frac{z}{\delta_1}\|_Y = 1$ ist, muß $|\delta_1| = |\varepsilon_1|$ sein.

Für die vollständige Beschreibung aller Koordinaten von A(X) sind noch ein paar Bemerkungen notwendig.

Lemma 1.2.: Seien X, Y zusammenhängende affinoide Teilbereiche in $\mathbb{P}^1_k(x)$ bzw. $\mathbb{P}^1_k(y)$ und sei

$$I : A(Y) \to A(X)$$

ein injektiver Algebrahomomorphismus. Ist der kanonische $\bar{k}$-Algebrahomomorphismus

$$\bar{I} : \bar{A}(Y) \to \bar{A}(X)$$

surjektiv, so ist I ein Isomorphismus.

Beweis: Da Homomorphismen affinoider Algebren stetig sind, werden potenzbeschränkte Elemente auf potenzbeschränkte Elemente abgebildet, so daß $I(\mathring{A}(Y)) \subset \mathring{A}(X)$. Gleiches gilt für topologisch nilpotente Elemente: $t(\mathring{A}(Y)) \subset t(\mathring{A}(X))$, wie wir aus [11] entnehmen. Wir erhalten also ein nicht notwendig injektives $\bar{I}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} \mathring{A}(Y) & \xrightarrow{I} & \mathring{A}(X) \\ \text{Red.}\downarrow & & \downarrow\text{Red.} \\ \bar{A}(Y) & \xrightarrow{\bar{I}} & \bar{A}(X) \end{array}$$

Sei nun $\bar{I}$ surjektiv. Wir zeigen mit einem approximativen Verfahren, daß $I(\mathring{A}(Y)) = \mathring{A}(X)$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

Sei nun $f \in \mathring{A}(X)$. Wir können annehmen, daß $\|f\|_X = 1$ ist, da sonst durch Multiplikation mit einer Konstanten dies immer erreicht werden kann. Zu f existiert ein $g_o \in A(Y)$ mit $\overline{g_o} \in \bar{I}^{-1}(\bar{f})$, $\|g_o\|_Y = 1$. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt nun $f - I(g_o) \in t(\mathring{A}(X))$. Sei $\delta_1 \in t(\mathring{k})$ so gewählt, daß $|\delta_1| = \|f - I(g_o)\|_X < 1$ ist. Wir setzen:

$$f_1 := \delta_1^{-1}(f - I(g_o))$$

und bekommen:

$$f = I(g_o) + \delta_1 f_1.$$

Mit vollständiger Induktion über n erhalten wir für f eine Darstellung

$$f = I(g_o) + \delta_1 I(g_1) + \ldots + \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_n I(g_n) + \delta_1 \cdot \ldots \delta_{n+1} \cdot f_{n+1}$$

bzw.

$$f = I(g_o + \delta_i g_1 + \ldots + \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_n \cdot g_n) + \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_{n+1} \cdot f_{n+1}$$

mit $g_i \in A(Y)$, $\|g_i\|_Y = 1$ und $\delta_i \in t(\mathring{k})$, $\|f_{n+1}\|_X = 1$.

Wir zeigen, daß die g_i so gewählt werden können, daß ein $\theta \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $|\delta_i| \leq \theta < 1$. Damit erhalten wir:

$$\lim_{r \to \infty} |\prod_{i=1}^{r} \delta_i| = 0.$$

Aus der Stetigkeit von I folgt dann mit der Vollständigkeit von A(Y), daß es ein $g \in A(Y)$ gibt mit $I(g) = f$.

A(X) bzw. A(Y) haben die Form $k\langle x_o, \ldots, x_s\rangle$ bzw. $k\langle y_o, \ldots, y_t\rangle$. Zu x_j, $0 \leq j \leq s$, gibt es ein $u_j \in A(Y)$, $\|u_j\|_Y = 1$, so daß $\overline{u_j} \in \bar{I}^{-1}(\overline{x_j})$ ist. Sei $\theta_j := \|x - I(u_j)\|_X < 1$.

Wir setzen

$$\theta := \max_{j=o}^{s} \theta_j < 1.$$

Für jedes $f_i \in A(X)$ können wir oben jetzt $g_i \in A(Y)$ so wählen, daß $|\delta_i| = \|f_i - I(g_i)\|_X \leq \theta$ ist.

Denn ist

$$f_i = \sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu^o x_o^\nu + \ldots + \sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu^s x_s^\nu$$

mit $|a_\nu^i| \leq 1$ und $\lim_{\nu\to\infty} |a_\nu^i| = 0$, so ist

$$g_i := \sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu^o u_o^\nu + \ldots + \sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu^s u_s^\nu \in \mathring{A}(\bar{Y})$$

und offensichtlich

$$\|f_i - I(g_i)\|_X \leq \max_{j=1}^{s} \|x_j^\nu - I(u_j)^\nu\|_X \leq \theta \quad \text{für alle} \quad \nu \geq 1.$$

Damit ist alles bewiesen.

Satz I.1: Sei $A(X) = k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{x - a_s}\rangle$, so ist $z \in A(X)$ genau dann eine Koordinate auf X, falls ein j, $0 \leq j \leq s$, existiert, so daß

$$z = C_o + C_1 x_j + \eta_o(x_o) + \ldots + \eta_s(x_s)$$

ist mit $|C_o| \leq 1$, $|C_1| = 1$

und $\|\eta_i\| < r_{ji}$,

wobei $\eta_i \in k\langle x_i\rangle$ ohne konstantes Glied ist und mit r_{ji} wie oben ein Radienverhältnis von X bezeichnet wird.

Beweis: Wir können davon ausgehen, daß $\eta_j(x_j)$ frühestens quadratisch beginnt, da der lineare Anteil in C_1 aufgenommen werden kann. Weiter setzen wir $j = 0$ voraus, da wir

jederzeit, wie wir weiter oben gesehen haben, den definierenden Kreis $K(x_j)$ von X als endliche Kreisscheibe in $\mathbb{P}^1_k(x_j)$ ansehen können. Damit ist $r_{ji} = r_{oi} = |\varepsilon_i|$ und $r_{jo} = r_{oo} = 1$.

Die eine Richtung des Beweises folgt aus Lemma 1.1.
Denn aus dem Beweis zu 1.1 (3) folgt, daß $\|\eta\|_Y < |\varepsilon_1|$ ist.
Da aber $\eta = \eta_o + \ldots + \eta_s$, $\|\eta\|_X = \max_{i=o}^{s} \|\eta_i\|_X$ und offenbar $\|\eta_1\|_X = \|\eta_1\|_Y$ ist, ist damit auch $\|\eta_1\|_X < |\varepsilon_1|$.

Nehmen wir an, z habe die im Satz geforderte Darstellung.

Wir zeigen die Existenz von Funktionen $z_i := \frac{\varepsilon_i}{z - b_i}$ in A(X) für geeignet gewählte $b_i \in k$, $|b_i| \leq 1$, für $i > 0$. Aus der Konstruktion wird $\|z_i\| = 1$ hervorgehen und $\overline{z_i} = \alpha_i \overline{x_i}$ in $\bar{A}(X)$. Offensichtlich ist $\bar{z} = \overline{C_o} + \overline{C_1} \cdot \bar{x}$. Die Behauptung folgt aus $k(z_o, \ldots, z_s) \hookrightarrow k(x_o, \ldots, x_s)$ und $\bar{k}[\overline{z_o}, \ldots, \overline{z_s}] = \bar{k}[\overline{x_o}, \ldots, \overline{x_s}]$ mit Lemma 1.2.

a) Eine Funktion $z_1 = \frac{\varepsilon_1}{z - b_1}$ existiert in A(X), wenn die geometrische Reihe

$$\frac{\varepsilon_1}{z - b_1} = C_1^{-1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{x} \cdot \sum_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu C_1^{-\nu} \cdot \rho^\nu$$

mit $\rho := \dfrac{C_o - b_1 + \sum_{i=o}^{s} \eta_i}{x}$ konvergiert.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\|\rho\| < 1$ ist.

Für $\rho \in A$ gibt es eine Darstellung

$$\rho = \rho_o(x_o) + \ldots + \rho_s(x_s)$$

mit $\rho_i \in k(x_i)$. Da $\|\rho\| = \max_{i=o}^{s} \|\rho_i\|$ ist, müssen wir nur die ρ_i auf ihre Norm untersuchen.

(o) $\rho_o = \frac{\eta_o}{x} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha_\nu^o x^{\nu-1}$, $\|\rho_o\| = \|\eta_o\| < 1$ nach Voraussetzung.

(1) Für die Berechnung der ρ_i mit $i > o$ muß der Ausdruck

$$\frac{\eta_i}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^i \left(\frac{\varepsilon_i}{x - a_i}\right)^\nu \quad \text{näher untersucht werden.}$$

Aus der Partialbruchgleichung

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\varepsilon_i}{x - a_i} = \frac{1}{a_i} \frac{\varepsilon_i}{x - a_i} - \frac{\varepsilon_i}{a_i} \cdot \frac{1}{x}$$

folgt mit vollständiger Induktion und anschließendem Grenzübergang:

$$\frac{\eta_i}{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \alpha_\nu^i \left(\frac{\varepsilon_i}{a_i}\right)^\nu \right) \cdot \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{\varepsilon_i}{a_i})^{k-1} \frac{\alpha_{k+\nu-1}^i}{a_i} \right) \left(\frac{\varepsilon_i}{x - a_i}\right)^\nu .$$

Für ρ_1 erhalten wir somit:

$$\rho_1 = \left(C_o - b_1 + \sum_{k=2}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \alpha_\nu^k \left(\frac{\varepsilon_k}{a_k}\right)^\nu \right)\right) \cdot \frac{1}{x} + \frac{\eta_1}{x}$$

mit $\frac{\eta_1}{x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^1 \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{\varepsilon_1}{x}\right)^\nu$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{x}\right)^{\nu+1} .$$

Offensichtlich kann b_1 mit $|b_1| \leq 1$ so gewählt werden ($|\varepsilon_k| \leq |a_k|$), daß

$$\rho_1 = \frac{\eta_1}{x}, \quad \|\rho_1\| = \frac{\|\eta_1\|}{|\varepsilon_1|}.$$

Da $\|\eta_1\| < |\varepsilon_1|$ nach Voraussetzung ist, folgt somit auch $\|\rho_1\| < 1$.

(2) Für ρ_i mit $i > 1$ liefert die obige Beziehung

$$\rho_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{\varepsilon_i}{a_i})^{k-1} \frac{\alpha_{k+\nu-1}^{i}}{a_i} \Big) (\frac{\varepsilon_i}{x - a_i})^{\nu}$$

$$\|\rho_i\| = \max_{\nu=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{\varepsilon_i}{a_i})^{k-1} \frac{\alpha_{k+\nu-1}^{i}}{a_i} \Big|$$

$$= \max_{\mu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{\mu}^{i}|}{|a_i|} = \frac{\|\eta_i\|}{|a_i|}, \text{ da } |\frac{\varepsilon_i}{a_i}| \leq 1 \text{ ist.}$$

Weil $\|\eta_i\| < |\varepsilon_i| \leq |a_i|$ nach Voraussetzung gilt, ist auch $\|\rho_i\| < 1$. Damit ist auch $\|\rho\| < 1$ und die Existenz von z_1 gesichert.

Offensichtlich haben wir $\|z_1\| = 1$ und $\overline{z_1} = \bar{C}_1^{-1} \cdot \overline{x_1}$.

(b) Die Untersuchung für z_j, $j > 1$, führen wir auf den eben durchgeführten Fall zurück, indem wir von x zu $x - a_j$ übergehen.

Für z bekommen wir dann:

$$z = C_o' + C_1'(x - a_j) + \eta_o'(x - a_j) + \eta_1(x_1) + \ldots + \eta_s(x_s)$$

mit dengleichen Bedingungen für die Beträge und Normen wie oben. Zu beachten ist nur, daß

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1}{x} = \frac{\varepsilon_1}{(x - a_j) - (-a_j)}, x_i = \frac{\varepsilon_i}{x - a_i} = \frac{\varepsilon_i}{(x - a_j) - (a_i - a_j)}$$

für $i \neq j$ ist.

Die Existenz eines $\frac{\varepsilon_i}{z - b_i}$ entnehmen wir jetzt aus a), dies ist dann der Fall, wenn

$\|\eta_o'\| < 1$, $\|\eta_i\| < |\varepsilon_i|$ und $\frac{\|\eta_i\|}{|a_i - a_j|} < 1$ ist.

Das ist aber erfüllt, da $\|\eta_i\| < |\varepsilon_i| \leq |a_i - a_j|$ nach Voraussetzung gilt.

§2. S-FACH GELOCHTE SCHEIBEN

Unter den affioniden Teilbereichen zeichnen sich welche aus, die eine koordinatenunabhängige Definition von 'Rand' und 'Innerem' erlauben und außerdem die wünschenswerte Eigenschaft der Schrumpfbarkeit besitzen, ohne ihre charakteristischen geometrischen Eigenschaften zu verlieren. Sie werden in [7] als gelochte Scheiben bezeichnet.

Definition: Der zusammenhängende affionide Teilbereich S mit der Algebra $A(S) = k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{x - a_s}\rangle$ heißt s-fach gelochte Scheibe, falls eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(a) $|\varepsilon_i| < |a_i - a_j| < 1$ für alle $i \neq j$ $(a_1 := 0)$.

(b) In $\bar{A}$ gelten die Gleichungen

$$\overline{x_i} \cdot \overline{x_j} = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Aus den Partialbruchgleichungen (*) folgt sofort die Äquivalenz von (a) und (b). Die Definition ist auch koordinatenunabhängig, da die Gleichungen (¤) zeigen, daß $\overline{x_j} = \overline{x_{ji}}$ ist, wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\sigma = id$ in Lemma 1.1 setzen können und daraus $\zeta_i = 0$ für alle i folgt. Das bedeutet $\overline{z_i} = \alpha_i \bar{x}_{\sigma(i)}$ für eine andere Koordinate z und somit $\overline{z_i} \cdot \overline{z_j} = 0$ für $i \neq j$.

Definition: Ist S eine s-fach gelochte Scheibe mit $s \geq 1$, dann heißt

$$\partial S := \bigcup_{i=0}^{s} \partial_i S \text{ der } \underline{\text{Rand}} \text{ von S und}$$

$$\partial_i S := \{x \in S \mid |x_i(x)| = |x_i| = 1\}$$

i-ter Rand von S. $\overset{\circ}{S} := S - \partial S$ wird Menge der inneren Punkte von S genannt.

Diese Definition ist bis auf Numerierung der Ränder unabhängig von x, sofern von einer Standarddarstellung für S (mit $a_1 = 0$) ausgegangen wird. Denn für eine andere Koordinate z gilt dann $\overline{z_i} - \alpha_i \bar{x}_{\sigma(i)} = 0$. z_i und $x_{\sigma(i)}$ nehmen also in denselben Punkten ihr Supremum an und damit ist der i-te Rand in z gleich dem $\sigma(i)$-ten Rand in x. Aus $\overline{x_i} \cdot \overline{x_j}=0$ folgt $\partial_i S \cap \partial_j S = \emptyset$ für $i \neq j$. Der Rand besitzt s + 1 Komponenten.

Ist $S = \bigcap_{i=o}^{s} K_i$ mit $K_i = \{ x \mid |x_i(x)| \leq 1\}$ und bezeichnen wir mit

$$K_i^{-1} := \{ x \mid |x_i(x)| \geq 1\},$$

so haben wir

$$\partial_i S = K_i \cap K_i^{-1}$$

und

$$A(\partial_i S) = k\langle x_i, x_i^{-1} \rangle .$$

Bei der affinoiden Kreisscheibe können wir nicht von einem koordinatenunabhängigen Rand sprechen. Gehen wir von der oben angegebenen Definition vom Rand aus, so kann je nach Kordinatenwahl jeder Punkt Randpunkt oder auch innerer Punkt sein. Da aus dem Zusammenhang im folgenden immer ersichtlich ist, welche Koordinate einer Kreisscheibe ausgezeichnet ist, werden wir auch von dem Rand der Kreisscheibe sprechen. Ist beispielsweise K_i die i-te definierende Kreisscheibe von S, so ist der Rand von K_i in diesem Zusammenhang der i-te Rand von S.

Wir betrachten s-fach gelochte Scheiben mit dem Ziel, sie als Grundbausteine spezieller analytischer Räume zu betrachten und studieren deshalb ihre Eigenschaften als Überdeckungsmengen.

Definition: Sind $X = \bigcap_{i=o}^{s} K_i$ und $X' = \bigcap_{i=o}^{t} K'_i$

zusammenhängende Teilbereiche des $\mathbb{P}^1_k(x)$, so heißt X' eine echte Schrumpfung von X, falls $X' \subset_{\neq} X$ ist und ein

$$\tau : \{0, \ldots, s\} \to \{0, \ldots, t\}$$

existiert, so daß

$$K'_{\tau(i)} \subset_{\neq} K_i \text{ ist.}$$

Bemerkung: Gibt es zu X ein X' mit injektivem τ,

so ist X eine gelochte Scheibe.

Wir müssen dazu nur den Fall $s \geq 1$ untersuchen. Sei A(X) in einer Standarddarstellung $k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_1}{x - a_s}\rangle$ gegeben, so zeigen wir, daß für $K_i(x_i) = \{x \mid |x_i(x)| \leq 1\}$ gilt:

$$K'_{\tau(i)} \subset \{x \mid |x_i(x)| < 1\}.$$

Aus der Injektivität von τ folgern wir, daß $K'_{\tau(i)}$ und $K'_{\tau(j)}$ für alle $i \neq j$ komaximal in $\mathbb{P}^1_k$ sind. Ist die oben aufgeführte Eigenschaft nicht erfüllt, so folgt aus der nichtarchimedischen Geometrie, daß $K'_{\tau(i)} \subset \{x \mid |x_i(x)| = 1\}$.
Das führt aber für $K'_{\tau(o)}$ und $K'_{\tau(1)}$ sofort zum Widerspruch. Dann aber auch für $K'_{\tau(i)}$ für $i > 1$, da sonst $K'_{\tau(i)}$ und $K'_{\tau(o)}$ oder $K'_{\tau(i)}$ und $K'_{\tau(1)}$ nicht komaximal sein können.
Da $K'_{\tau(i)}$ und $K'_{\tau(j)}$ also disjunkte Komplemente haben für alle $i \neq j$, ist damit

$$\{x \mid |x_i(x)| = 1\} \cap \{x \mid |x_j(x)| = 1\} = \emptyset$$

und dadurch $\overline{x}_i \cdot \overline{x}_j = 0$ in $\bar{A}(X)$.

Bemerkung: Zu einer s-fach gelochten Scheibe $S = \bigcap_{i=o}^{s} K_i$, $A(S) = k\langle x_o, \ldots, x_1\rangle$, gibt es eine s-fach gelochte Scheibe $S' = \bigcap_{i=o}^{s} K_i'$ mit $K_i' \subsetneq K_i$ und $S' \subset \overset{o}{S}$.

Wählt man ein $\delta \in k$ mit $1 > |\delta| > \max\{|a_i|, i>1; |\frac{\varepsilon_i}{a_i - a_j}|, i>0, i \neq j\}$ (k nicht diskret bewertet), dann folgt aus

$$1 > |\frac{a_i - a_j}{\delta}| > |\frac{i}{\delta^2}|,$$

daß $A(S') = k\langle \frac{x}{\delta}, \ldots, \frac{\varepsilon_s \cdot \delta^{-2}}{\frac{x}{\delta} - \frac{a_s}{\delta}}\rangle$ eine s-fach gelochte Scheibe ist

mit

$$K_i' = \{x \mid |\frac{x_i(x)}{\delta}| \leq 1\} \subsetneq K_i.$$

Sei jetzt $\{U, V\}$ eine nicht triviale Überdeckung von $T := U \cup V \subset \mathbb{P}_k^1(x)$ durch gelochte Scheiben mit $U \cap V \neq \emptyset$.

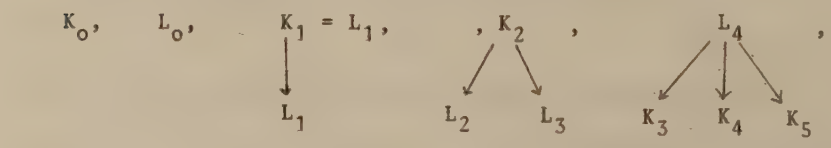
Seien

$$U := \bigcap_{i=o}^{s} K_i, \qquad V := \bigcap_{i=o}^{t} L_i$$

die kanonischen Darstellungen durch paarweise komaximale affinoide Kreisscheiben und $A(U) = k\langle u_o, \ldots, u_s\rangle$,

$A(V) = k\langle v_o, \ldots, v_t\rangle$.

Die K_i und L_i sind durch Inklusion geordnet. Wir setzen $K_i \rightarrow L_j$ für $K_i \subset L_j$. Zum Beispiel:



Wir nennen eine Kreisscheibe K_i (bzw. L_i) maximal, falls eine Kreisscheibe L_j (bzw. K_j) existiert, die in ihr echt enthalten ist. Ist $K_i = L_j$, so nennen wir K_i und L_j sowohl maximal als auch minimal. In allen anderen Fällen sei K_i (bzw. L_i) minimal.

Im Beispiel sind $L_1 = K_1$, L_2 L_3, K_3, K_4, K_5 maximal und L_o, $L_1 = K_1$, K_o, K_2, L_4 minimal.

Offensichtlich gilt:

$$U \cap V = \cap \text{ minimaler Kreisscheiben}$$

$$T = U \cup V = \cap \text{ maximaler Kreisscheiben.}$$

Gibt es keine maximalen Kreisscheiben, so ist $T = \mathbb{P}^1_k$, sonst ist T wieder eine gelochte Scheibe vom Rang kleiner als Rang U + Rang V, wie man leich nachprüft. Minimale Kreisscheiben muß es immer geben, da sonst $U \subset V$ bzw. $V \subset U$ folgt, also $\{U, V\}$ T trivial überdeckte.

Lemma 2.1: Sei $\{U, V\}$ eine nicht triviale Überdeckung von $T := U \cup V$ durch gelochte Scheiben und $U \cap V \neq \emptyset$. Es gibt eine endliche Verfeinerung $\{U, V^1, \ldots, V^l\}$ aus gelochten Scheiben mit $V^i \subset V$, so daß

(1) $V^i \cap V^j = \emptyset$ für $i \neq j$;

(2) $U \cap V^i$ eine Randkomponente von U (und V^i) ist;

(3) für $T \neq \mathbb{P}^1_k$ der Rand von T die Vereinigung aller Randkomponenten der V^i und U ist, die in (2) nicht als Durchschnitte erscheinen.

Beweis: Seien $K_1, \ldots, K_l$ minimal und nicht maximal. Wir setzen

$$V^j := K_j^{-1} \cap \cap L_{\max(j)}, \quad 1 \leq j \leq l,$$

wobei max (j) alle Indizes i durchläuft mit $K_j \subsetneq L_i$.

Gibt es kein L_i, das K_j echt umfaßt, so ist $V^j = K_j^{-1}$. Offensichtlich ist $V^j \subset V$. Die Eigenschaft (1) folgt daraus, daß U eine gelochte Scheibe ist und daher $K_j^{-1} \cap K_i^{-1} = \emptyset$ ist für $i \neq j$. (2) erhalten wir sofort aus $U \cap V^i = K_i \cap K_i^{-1} = \partial_i U$. Gibt es maximale Kreisscheiben, so ist der Rand von T die Vereinigung der Ränder der maximalen Kreisscheiben bei entsprechender Koordinatenwahl. Das sind genau die Ränder, die in (2) nicht als Durchschnitte erscheinen.
Es bleibt zu zeigen, daß V^j für $0 \leq j \leq 1$ eine gelochte Scheibe ist. Aus der nichtarchimedischen Geometrie folgt wieder

$$K_j \subset \{x \mid |v_i(x)| < 1\}$$

für $K_j \subsetneq L_i$, da wir sonst $K_j \subset \partial_i V$ und damit $U \subset V$ haben. Somit gilt $\overline{u_j^{-1}} \cdot \overline{v_i} = 0$ in $\bar{A}(V^j)$. Da V eine gelochte Scheibe ist, gilt sowieso $\overline{v_i} \cdot \overline{v_j} = 0$ für $i \neq j$ in $\bar{A}(V)$ und damit auch in $\bar{A}(V^j)$. Damit ist alles gezeigt.

Lemme 2.2.: Sei S eine gelochte Scheibe und $\mathfrak{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ eine Überdeckung aus gelochten Scheiben von S.
Es gibt eine Verfeinerung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{V}$ aus gelochten Scheiben, so daß

(1) $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$ ist für paarweise verschiedene Überdeckungsmengen aus $\mathfrak{U}$;

(2) $U_i \cap U_j$ leer ist oder eine Randkomponente von U_i wie U_j;

(3) der Rand von S die Vereinigung aller Randkomponenten der $U_i \in \mathfrak{U}$ ist, die nicht als Durchschnitte in (2) auftreten.

Beweis: Wir zeigen die Existenz eines $\mathfrak{U}$ durch vollständige Induktion über die Anzahl der V_i.

Sei

$$T_m := \bigcup_{i=1}^{m} V_i, \qquad 1 \leq m \leq n.$$

Wir können aufgrund des Zusammenhangs der gelochten Scheibe S die V_i so durchnumerieren, daß T_m ebenfalls eine zusammenhängende gelochte Scheibe wird, insbesondere $T_m \cap V_{m+1} \neq \emptyset$ ist für $1 \leq m \leq n - 1$ (siehe Kapitel II.).

Nach Lemma 2.1 gibt es zu T_2 eine Überdeckung aus gelochten Scheiben, die die geforderte Eigenschaft hat.

Sei $\mathfrak{U}_{m-1} := \{U_1, \ldots, U_t\}$ eine Überdeckung von T_{m-1}, $m > 2$, die eine Verfeinerung von $\{V_1, \ldots, V_{m-1}\}$ ist und die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt.

Wenden wir auf $T_m = T_{m-1} \cup V_m$ Lemma 2.1 an, so erhalten wir eine Überdeckung $\{T_{m-1}, V_m^1, \ldots, V_m^1\}$ von T_m mit $V_m^i \cap V_m^j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Da $\mathfrak{U}_{m-1}$ die Bedingung (3) erfüllt, gilt für

$$\mathfrak{U}_m := \{U_1, \ldots, U_t, V_m^1, \ldots, V_m^1\}$$

die Bedingung (1) nach Definition der V_m^i in 2.1.

Die Eigenschaften (2) und (3) folgen für $\mathfrak{U}_m$ ebenso leicht aus 2.1.

Wir fügen noch zwei später verwendete geometrische Eigenschaften von gelochten Scheiben hinzu.

Lemma 2.3: Sind U, V, W gelochte Scheiben in $\mathbb{P}_k^1$ und $\partial := U \cap V \cap W$ eine gemeinsame Randkomponente, so folgt aus $U \cap V = U \cap W = \partial$, daß $V \cup W$ ∂ als Randkomponente besitzt (und $V \cap W \supsetneq \partial$).

Beweis: Sei K_o wie oben ein definierender Kreis von U und $\partial = K_o \cap K_o^{-1}$. Aus $\partial = U \cap V = U \cap W$ folgt sofort, daß K_o^{-1} ein definierender Kreis von V und W sein muß und damit auch von $V \cup W$ (K_o^{-1} ist minimal und maximal).
Daraus folgt, daß die gelochte Scheibe $V \cup W$ $K_o^{-1} \cap K_o = \partial$ als Randkomponente besitzt. Die Aussage in Klammern ergibt sich daraus, daß K_o kein definierender Kreis der gelochten Scheiben V bzw. W sein kann.

Lemma 2.4: Sind U, V gelochte Scheiben des $\mathbb{P}_k^1(u)$ und $U \cap V = \partial_1 U = \partial_o V$, $U \cup V \neq \mathbb{P}_k^1$, so folgt für $A(U) = k\langle u, \frac{\varepsilon_1}{u}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{u - a_s}\rangle$:

(1) $A(V) = k\langle v := \frac{u}{\varepsilon_1}, \frac{\delta_1}{v - b_1}, \ldots, \frac{\delta_t}{v - b_t}\rangle$

(2) $A(U \cup V) = k\langle u, \frac{\varepsilon_1 \cdot \delta_1}{u - b_1'}, \ldots, \frac{\varepsilon_1 \cdot \delta_t}{u - b_t'}, \frac{\varepsilon_2}{u - a_2}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{u - a_s}\rangle$

(3) Rang $(U \cup V)$ = Rang U + Rang V - 2

(4) $\partial(U \cup V) = \bigcup_{\substack{i=o \\ i \neq 1}}^{s} \partial_i U \quad \cup \quad \bigcup_{i=1}^{t} \partial_i V.$

Beweis: Sei $K_1 = \{u \in \mathbb{P}_k^1(u) \,|\, |u| \geq |\varepsilon_1|\}$ ein definierender Kreis von U. Wegen der Randbeziehung muß $K_1^{-1} = \{u \,|\, |u| \leq |\varepsilon_1|\}$ ein definierender Kreis von V, sagen wir L_o, sein. Da U eine gelochte Scheibe ist, enthält jedes K_i, $i \neq 1$, $L_o = K_1^{-1}$ und umgekehrt jedes L_j, $j \neq 0$, $K_1 = L_o^{-1}$. Somit sind K_i, $i \neq 1$ und L_j, $j \neq 0$, maximal im oben erwähnten Sinn. Für $U \cup V$ erhalten wir

$$U \cup V = \bigcap_{\substack{i=o \\ i \neq 1}}^{s} K_i \cap \bigcap_{j=1}^{t} L_j.$$

Für $b_j' := \varepsilon_1 b_j$, $1 \leq j \leq t$, ergibt sich die Darstellung (2). Alles weitere folgt leicht aus den vorangegangenen Bemerkungen.

Kap. II: LOKAL EINFACHE ANALYTISCHE RÄUME

In diesem Abschnitt betrachten wir k-analytische Räume, die aus affinoiden Teilbereichen eines $\mathbb{P}^1_k$ aufgebaut sind und hier als lokal einfach bezeichnet werden sollen. Die Bezeichnung kommt daher, daß bei der Überlagerungstheorie solcher Räume die Teilbereiche des $\mathbb{P}^1_k$ die Funktion von (einfach zusammenhängenden) Kreisen in der komplexen Funktionentheorie übernehmen. Zusätzlich fordern wir, daß die analytische Struktur separiert sein soll. Schließlich betrachten wir nur geschlossene analytische Räume, die durch die Existenz eines endlichen schrumpfbaren Atlases gekennzeichnet sind.

Unser Ziel ist es, für diese Räume nachzuweisen, daß sie Mumford-Kurven sind, also durch eine Schottky-Gruppe uniformisiert werden. Den Begriff der Mumford-Kurve entnehmen wir [6] und [9].

In [8], 4.3 steht folgende Aussage:

> Ist C eine projektiv algebraische Varietät über k, so besitzt C in natürlicher Weise die Struktur eines separierten, geschlossenen k-analytischen Raumes.
> Jeder eindimensionale, separierte, geschlossene k-analytische Raum ist projektiv algebraisch über k.

Mit den weiter unten definierten Begriffen wurde in [6], §3 gezeigt:

> Jede irreduzible Mumford-Kurve besitzt die analytische Struktur eines lokal einfachen, zusammenhängenden, separierten, geschlossenen k-analytischen Raumes.

In [9], Satz 3.10, wurde inzwischen von M. v. d. Put mit algebraischen Methoden gezeigt, daß jede projektiv algebraische Kurve

über k, die eine Überdeckung aus affinoiden Teilbereichen eines $\mathbb{P}^1_k$ besitzt (das entspricht der dort aufgeführten Eigenschaft 'totally split') eine Mumford-Kurve ist.

Wir wollen hier im wesentlichen mit funktionentheoretischen Methoden zeigen:

Hauptsatz: Jeder lokal einfache, zusammenhängende, separierte, geschlossene k-analytische Raum ist eine irreduzible Mumford-Kurve.

Im folgenden soll mit X stets ein k-analytischer Raum bezeichnet werden, der die Eigenschaften besitzt, die im Hauptsatz aufgeführt sind.
Den Begriff des k-analytischen Raumes entnehmen wir [16]. Die topologische Struktur von X wird durch eine Grothendieck-Topologie gegeben: einem System von zulässig offenen Mengen und einem System von zulässigen Überdeckungen aus zulässig offenen Mengen. Wir werden jedoch nur von Überdeckungen sprechen, da für unsere Räume die Begriffsbildung unproblematisch ist: die eindimensionalen affioniden Teilräume und die endlichen Überdeckungen von affinoiden Teilräumen durch affinoide Teilräume bilden eine Basis der Grothendieck-Topologie auf X.

Alle Überdeckungen seien eigentlich, das heißt, ist $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von X, so ist $\bigcup_{\substack{i \neq i_o \\ i \in I}} U_i \neq X$ für alle $i_o \in I$.

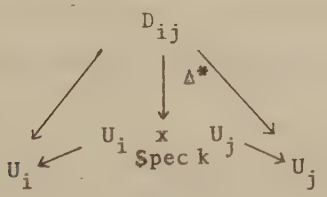
Wir klären zunächst die einzelnen Begriffe.

(1) Wir nennen X einen lokal einfachen k-analytischen Raum, falls es eine Überdeckung $\{U_i, i \in I\}$ von X gibt,

die aus affinoiden Teilbereichen U_i eines $\mathbb{P}^1_k(x_i)$ besteht.

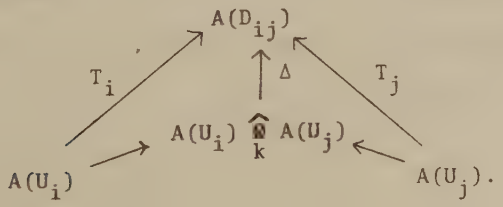
(2) X heißt zusammenhängend, falls zu jeder Überdeckung $\{U_i, i \in I\}$ von X und jeder Überdeckungsmenge U_i ein U_j, $j \neq i$, existiert mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.
Dazu ist äquivalent [22], Satz 1.18:
Zu jedem Paar U_i, U_j existieren Indizes $i = i_o, \ldots, i_n = j$ aus I mit $U_{i_m} \cap U_{i_{m+1}} \neq \emptyset$, $m = 0, \ldots, n-1$.

(3) X heißt separiert([2], §1), falls für jede Überdeckung $\{U_i, i \in I\}$ von X aus affinoiden Räumen die U_i separiert verheftet sind, das heißt, daß entweder $D_{ij} := U_i \cap U_j$ leer ist oder ein Teilbereich von U_i wie U_j mit eindeutig bestimmter Algebra $A(D_{ij})$ ist, so daß die Diagonalabbildung Δ^* eine abgeschlossene Immersion ([5], §1) ist:



Die auftretenden Abbildungen in dem kommutativen Diagramm sind die kanonischen Abbildungen des Faserproduktes. D_{ij} ist bezüglich (Δ^*) ein abgeschlossener analytischer Teilraum von $U_i \underset{\text{Spec k}}{\times} U_j$.

Für die Algebren erhalten wir ebenfalls ein kommutatives Diagramm:



T_i, T_j sind die kanonischen Teilbereichsabbildungen ([25], Def. 7.1). Mit '$\hat{\otimes}$' wird das analytische (affinoide) Tensorprodukt([19]) bezeichnet, das beispielsweise in [1], §6 behandelt wird.

Δ ist surjektiv, also $A(D_{ij}) = A(U_i \hat{\otimes} A(U_j)/ \ker \Delta$.

(4) Wir nennen X einen geschlossenen k-analytischen Raum, falls es zu X eine endliche Überdeckung gibt, die eine echte Schrumpfung besitzt ([8], 4.4).

Für lokal einfache Räume heißt das, daß es zu $\{U_1,\ldots, U_n\}$, wobei U_i ein zusammenhängender affinoider Teilbereich eines $\mathbb{P}^1_k(x_i)$ ist, eine Verfeinerung $\{U'_1,\ldots, U'_n\}$ gibt, so daß U'_i eine echte Schrumpfung von U_i ist (§2).

Als Beispiele für einen k-analytischen Raum, der die Eigenschaften (1) bis (4) erfüllt, können wir den $\mathbb{P}^1_k(x)$ aufführen mit der Überdeckung $\{\{x||x| \leq r\}, \{x||x| \geq \frac{1}{r}\}\}$, r>1. Ein zusammenhängender affinoider Teilbereich des $\mathbb{P}^1_k$ erfüllt die Eigenschaften (1), (2) und (3), jedoch nicht (4).

Bemerkung: Sei X wie im Hauptsatz gewählt. Es gibt eine endliche Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_1,\ldots, V_n\}$ von X aus s_i-fach gelochten Scheiben, die eine echte Schrumpfung $\mathcal{V}' = \{V'_1,\ldots, V'_n\}$ besitzt mit $V'_i \subset \overset{\circ}{V}_i$.

Beweis: X besitzt eine endliche Überdeckung $\{U_1,\ldots, U_n\}$ aus zusammenhängenden affinoiden Teilbereichen eines $\mathbb{P}^1_k(x_1)$, die eine echte Schrumpfung $\mathcal{V}' = \{V'_1,\ldots, V'_n\}$ besitzt.

In $\mathbb{P}^1_k(x_1)$ haben wir Darstellungen für $U := U_1$ und $V := V_1$ für jedes $1 \leq 1 \leq n$:

$$U = \bigcap_{i=o}^{s} K_i,\quad V' = \bigcap_{j=o}^{t} K'_j,\quad s := s(1),\ t := t(1),$$

mit einem $\tau : \{0,\ldots, s\} \to \{0,\ldots, t\}$ nach §2, so daß

$$K'_{\tau(i)} \subsetneq K_i \quad \text{ist.}$$

Seien $M := \{i,\ 0 \le i \le s \mid \tau^{-1}(\tau(i)) = \{i\}\}$

$N := \operatorname{Im}\tau - \tau(M)$

$\bar{s} := |M| + |N|$.

U ist nach einer Bemerkung in §2 eine gelochte Scheibe, falls $N = \emptyset$, also τ injektiv ist.

Da k nicht diskret bewertet ist, gibt es zu jedem $\tau(i) \in N$ eine Kreisscheibe $\bar{K}_{\tau(i)}$ mit:

$$K'_{\tau(i)} \subsetneq \bar{K}_{\tau(i)} \subsetneq K_i$$

für alle $0 \le \tau \le s$ mit $\tau(r) = \tau(i)$.

Wir setzen:

$$V := \bigcap_{m\in M} K_m \cap \bigcap_{n\in N} \bar{K}_n.$$

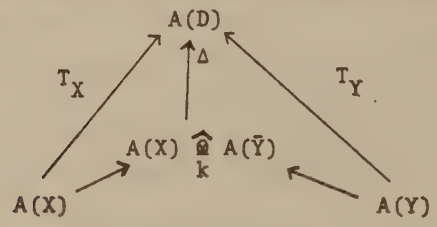
Damit erhalten wir $V' \subsetneq V \subset U$. Die V definierenden Kreisscheiben sind nach Konstruktion komaximal, und V ist eine $\bar{s}$-fach gelochte Scheibe mit echter (injektiver) Schrumpfung V', $V' \subset V$. Führen wir diesen Prozeß mit jedem 1, $1 \le 1 \le n$, durch, so erhalten wir die geforderte endliche Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_1,\ldots, V_n\}$ aus $\bar{s}(1)$-fach gelochten Scheiben.

§3. Separiert verheftete gelochte Scheiben

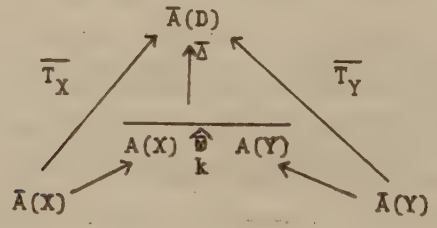
Aufgrund der letzten Bemerkung können wir uns bei allen weiteren Betrachtungen lokal einfacher Räume auf Überdeckungen aus gelochten Scheiben beschränken. Von zentraler Bedeutung für das Vorgehen ist das folgende Lemma:

Lemma 3.1: Sei $Z := X \cup Y$ ein separierter analytischer Raum und seien X, Y gelochte Scheiben des $\mathbb{P}^1_k(x)$ bzw. (y) mit einem zusammenhängenden Durchschnitt $D: = X \cap Y \neq \emptyset$.

Aus der Surjektivität der Diagonalabbildung Δ



folgtfür die affinen Reduktionen die Surjektivität von $\bar{\Delta}$.



Beweis: Sind die auftretenden affinoiden Algebren nicht speziell gewählt, so ist die Aussage falsch. Durch allgemeine Betrachtungen kann nur gezeigt werden, daß $\bar{\Delta}$ endlich ist: [12], Satz 3.

Ist D nicht zusammenhängend gewählt, so gilt die Aussage von Lemma 3.1 auch, falls D eine Vereinigung von Randkomponenten von X und Y ist.

Sei wieder $A(X) = k\langle x_0, \ldots, x_s\rangle$, $A(Y) = k\langle y_0, \ldots, y_s\rangle$. Die zweidimensionale affinoide Algebra $A(X) \hat{\otimes} A(Y)$ können wir in der Form $k\langle x_0, \ldots, x_s, y_0, \ldots, y_t\rangle$ schreiben, also als Quotient der Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen in $(s+1)+(t+1)$ Variablen, wobei die x_i bzw. y_l denselben Relationen genügen wie in A(X) bzw. A(Y) wie wir [1], §6 entnehmen. Für A(D) erhalten wir je eine Darstellung in x und y als Teilbereich des $\mathbb{P}^1_k(x)$ und $\mathbb{P}^1_k(y)$.

Da $D \subset X, Y$ ist, gilt:

$$A(D) = k\langle x_0, \ldots, x_s, \underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_{\underline{s}}\rangle$$

$$A(D) = k\langle y_0, \ldots, y_t, \underline{y}_0, \ldots, \underline{y}_{\underline{t}}\rangle$$

für geeignete gebrochen lineare Ausdrücke $\underline{x}_j$ in x bzw. $\underline{y}_m$ in y, so daß die Kreisscheiben $\underline{K}_j := \{x \in \mathbb{P}^1_k(x) \mid |\underline{x}_j(x)| \leq 1\}$ und $\underline{K}_{j'}$ für $j \neq j'$ komaximal und definierende Kreisscheiben von D in $\mathbb{P}^1_k(x)$ sind (analog für $\mathbb{P}^1_k(y)$).

Nach Voraussetzung sind ebenfalls die Kreisscheiben $K_0(x_0), \ldots, K_s(x_s)$ paarweise komaximal in $\mathbb{P}^1_k(x)$, jedoch müssen sie nicht zu den D in $\mathbb{P}^1_k(x)$ definierenden Kreischeiben gehören. Es kann der Fall

$$K_i \supsetneq \underline{K}_j$$

für $0 \leq i \leq s$, $0 \leq j \leq \underline{s}$ eintreten.

Umfaßt $K_0 \supsetneq \underline{K}_j$, so sei dies $\underline{K}_0$. In diesem Fall kann $\underline{x}_0$ als $\frac{x - \underline{a}_0}{\underline{\varepsilon}_0}$ gewählt werden, so daß wir

(1) $x_o = \underline{\varepsilon}_o \underline{x}_o + \underline{a}_o$ mit $|\underline{a}_o| \leq 1$, $|\underline{\varepsilon}_o| < 1$

erhalten. Sonst können wir für $\underline{x}_j$ von der Form $\underline{x}_j = \frac{\underline{\varepsilon}_j}{x - \underline{a}_j}$ ausgehen und erhalten aus $K_i \supsetneq \underline{K}_j$, $i > 0$;

(2) $$x_i = \frac{\varepsilon_i}{\underline{\varepsilon}_j} \cdot \underline{x}_j \cdot \sum_{\nu \geq o} \left(\frac{a_i - \underline{a}_j}{\underline{\varepsilon}_j}\right)^{\nu} \underline{x}_j^{\nu}$$

mit $|\varepsilon_i| < |\underline{\varepsilon}_j|$ und $|a_i - \underline{a}_j| < |\underline{\varepsilon}_j|$.

Wir gehen jetzt zu den affinen Reduktionen über. Da wir k algebraisch abgeschlossen gewählt haben und die Algebren A(X) bzw. A(Y) reduziert sind, ist nach [1], §6, Satz 5:

$$\overline{A(X) \underset{k}{\hat{\otimes}} A(Y)} = \bar{A}(X) \underset{\bar{k}}{\otimes} \bar{A}(Y).$$

Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\bar{k}[\bar{x}_o^D, \ldots, \bar{x}_s^D, \bar{\underline{x}}_o^D, \ldots, \bar{\underline{x}}_{\underline{s}}^D] = \bar{A}(D) = k[\bar{y}_{\ldots}^D, \bar{y}_t^D, \bar{\underline{y}}_o^D, \ldots, \bar{\underline{y}}_{\underline{t}}^D] & & & & \\
\uparrow \bar{T}_X & & \uparrow \bar{\Delta} & & \uparrow \bar{T}_Y \\
\bar{k}[\bar{x}_o, \ldots, \bar{x}_s] & \nearrow & \bar{k}[\bar{x}_o, \ldots, \bar{x}_s, \bar{y}_o, \ldots, \bar{y}_t] & \nwarrow & \bar{k}[\bar{y}_o, \ldots, \bar{y}_t]
\end{array}$$

Mit $\bar{x}_i^D$ bezeichnen wir dabei die Reduktion von x_i bezüglich D.

Es gilt offensichtlich $\bar{T}_X(\bar{x}_i) = \bar{\Delta}(\bar{x}_i) = \bar{x}_i^D$.

Ist nun $K_i \supsetneq \underline{K}_j$, so folgt mit (1) und (2), daß dies genau dann der Fall ist, wenn $\bar{x}_i^D \in \bar{k}$ ist.

Sei

$$M_x := \{x_i | \bar{x}_i^D \notin \bar{k}\}$$

$$M_y := \{y_l | \bar{y}^D \notin \bar{k}\}.$$

Wir bekommen somit für D die eindeutig bestimmte Darstellung durch paarweise komaximale Kreisscheiben in $\mathbb{P}^1_k(y)$:

$$D = \bigcap_{x_i \in M_x} K(x_i) \cap \bigcap_{j=o}^{s} \underline{K}(\underline{x}_j) = \bigcap_{y_1 \in M_y} K(y_1) \cap \bigcap_{m=o}^{t} \underline{K}(\underline{y}_m).$$

Aus Lemma 1.1 folgern wir, daß zu jedem $\underline{x}_j$ entweder ein $y_1 \in M_y$ oder ein $\underline{y}_m$ existieren muß, so daß in der Reduktion

$$\bar{k}[\bar{\underline{x}}_j^D] = \bar{k}[\bar{y}_1^D] \text{ oder } \bar{k}[\bar{\underline{y}}_m^D] \text{ ist.}$$

Tritt nur der erste Fall ein, so ist $\bar{\Delta}$ surjektiv.
Sei sonst $\bar{\underline{x}}_s^D \notin \operatorname{Im} \bar{\Delta}$.

Da $\bar{\Delta}$ endlich ist, gibt es für $\bar{\underline{x}}_s^D$ eine Ganzheitsgleichung über $\operatorname{Im} \bar{\Delta}$, also insbesondere über $\bar{k}[\bar{x}_o^D, \ldots, \bar{x}_s^D, \bar{\underline{x}}_o^D, \ldots, \bar{\underline{x}}_{s-1}^D]$

$$(\bar{\underline{x}}_s^D)^r + q_{r-1}(\bar{\underline{x}}_s^D)^{r-1} + \ldots + q_o = 0.$$

Berücksichtigen wir die Partialbruchgleichungen (*) der x_i bzw. $\underline{x}_j$, so schließen wir durch entsprechende Multiplikationen daraus auf ein Polynom in $\bar{x}_o^D$ (ohne Einschränkungen können wir annehmen, daß $x_o \in M_x$ ist):

$$(\bar{x}_o^D)^n + \alpha_{n-1}(\bar{x}_o^D)^{n-1} + \ldots + \alpha_o = 0, \ \alpha_i \in \bar{k}.$$

Da $\bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und daher nicht endlich ist, kann diese Beziehung nicht erfüllt sein.

Mit den Voraussetzungen von Lemma 3.1 erhalten wir:

Lemma 3.2: Ist X eine s-fach und Y eine t-fach gelocht Scheibe, so gilt für die Anzahl d der irreduziblen Komponenten von $D = X \cap Y \neq \emptyset$:

$$d \leq \min \{s, t\} + 1,$$

insbesondere:

Ist X eine affinoide Kreisscheibe, so ist d = 1, also X ∩ Y zusammenhängend.

Beweis: Sei d > 1. Ist $A(D) = \bigoplus_{n=1}^{d} A(D_n)$, so ist $\bar{A}(D) = \bigoplus_{n=1}^{d} \bar{A}(D_n)$.

Sei $p_n : A(D) \to A(D_n)$ die kanonische Projektion, $\Delta_n := p_n \circ \Delta$ und $T_{Yn} := p_n \circ T_Y$. T_{Yn} ist injektiv.
Ist nun $\bar{\Delta}_n(\bar{x}_i) \in \bar{A}(D_n) - \bar{k}$, so folgt sofort aus $D_n \cap D_m = \emptyset$ für $n \neq m$, daß $\bar{\Delta}_m(\bar{x}_i) \in \bar{k} \subset \bar{A}(D_m)$ ist.

Zu jedem $\bar{A}(D_n)$ muß es aber mindestens ein x_i, $0 \leq i \leq s$, geben mit $\bar{\Delta}_n(\bar{x}_i) \notin \bar{k}$, da sonst nach Lemma 3.1 mit $\bar{\Delta}_n$ auch $\bar{T}_{Yn}$ surjektiv ist und dann nach Lemma 1.2 $D_n = Y$ und damit d = 1 ist.

Somit ist $d \leq s + 1$.

Da die ganze Argumentation symmetrisch in y verläuft, ist alles gezeigt.

Im folgenden Satz nutzen wir die gewonnenen Aussagen über die affine Reduktion, um zu beweisen, daß separiert verheftete gelochte Scheiben mit zusammenhängendem Durchschnitt wieder in den $\mathbb{P}^1_k$ eingebettet werden können.

Satz II.1: Sei $Z := X \cup Y$ ein separierter analytischer Raum und seien X, Y gelochte Scheiben des $\mathbb{P}^1_k(x)$ bzw. (y).
Ist $D := X \cap Y \neq \emptyset$ zusammenhängend, so ist Z eine gelochte Scheibe eines $\mathbb{P}^1_k(z)$ oder der ganze $\mathbb{P}^1_k(z)$.

Beweis: Wir können annehmen, daß weder $X \subset Y$ noch $Y \subset X$ gilt. Die Bezeichnungen übernehmen wir aus Lemma 3.1. Danach können wir durch geeignetes Numerieren erreichen, daß

$M_x = \{x_o, \ldots, x_{s'}\}$, $0 \leq s' \leq s$, und $M_y = \{y_o, \ldots, y_{t'}\}$, $0 \leq t' \leq t$ ist. M_x und M_y können nicht leer sein, da wir sonst wieder mit 3.1 die Surjektivität von $\bar{T}_Y$ bzw. $\bar{T}_X$ erhalten und mit 1.2 auf $X \subset Y$ bzw. $Y \subset X$ schließen.

Nach Lemma 3.1 ist

$A(D) = k(x_o, \ldots, x_{s'}, \underline{x}_o, \ldots, \underline{x}_{\underline{s}}) = k(y_o, \ldots, y_{t'}, \underline{y}_o, \ldots, \underline{y}_{\underline{t}})$

die kanonische Darstellung von A(D) nach §1 in $\mathbb{P}^1_k(x)$ bzw. (y). Da X und Y nicht ineinander enthalten sind, können wir $\underline{s}, \underline{t} \geq 0$ annehmen. In $\bar{A}(D)$ besteht nach Lemma 1.1 und Lemma 3.1 zwischen $\bar{\underline{x}}_j^D$ und einem $\bar{y}_1^D$ (ebenso zwischen $\bar{\underline{y}}_m^D$ und einem $\bar{x}_i^D$) ein linearer Zusammenhang. Wir liften diese Gleichungen nach A(D):

$$y_m = c_m + a_m x_m + \sum_{i=o}^{s'} \eta_{im}(x_i) + \sum_{j=o}^{\underline{s}} \underline{\eta}_{jm}(\underline{x}_j), \quad 0 \leq m \leq \underline{t}$$

und

$$\underline{x}_j = d_j + b_j \underline{y}_j + \sum_{l=o}^{t'} \rho_{lj}(y_l) + \sum_{m=o}^{\underline{t}} \underline{\rho}_{mj}(\underline{y}_m), \quad 0 \leq j \leq \underline{s}$$

mit den Abschätzungen nach Satz I.1:

$|c_m|, |d_j| \leq 1, \quad |a_m| = |b_j| = 1$

und

$|\eta_{im}| < r_{im}, \quad |\underline{\eta}_{jm}| < r_{\underline{j}m},$

$|\rho_{lj}| < R_{lj}, \quad |\underline{\rho}_{mj}| < R_{\underline{m}j},$

wobei r_{im} das Radienverhältnis in $\mathbb{P}^1_k(x)$ von $K(x_i)$ (r_{jm} von $K(\underline{x}_j)$ zu $K(x_m)$ ist und analog R_{lj} in $\mathbb{P}^1_k(y)$ von $K(\bar{y}_l)$ ($R_{\underline{m}j}$ von $K(\underline{y}_m)$) zu $K(y_j)$.

Da die Radienverhältnisse unter Koordinatentransformationen nach Lemma 1.1(3) invariant sind, erhalten wir für

die Radienverhältnisse:

$$r_{jm} = R_{j\underline{m}}.$$

Da alle Radienverhältnisse kleiner gleich 1 sind, können wir ein $\theta \in R_+$ wählen, so daß

$$\max_{i,m,j,l} \{|\eta_{im}|, |\underline{\eta}_{jm}|, |\rho_{lj}|, |\underline{\rho}_{mj}|\} < \theta < 1$$

ist. Da X und Y nicht ineinander enthalten sind, gibt es ein Y_o.

Wir setzen:

(0) $Y_o = C^o + A^o x_o$

(1) $Y_o = C^1 + A^1 x_o + \sum_{i=o}^{s'} \eta_i^1(x_i) + \underline{\eta}^1(\underline{x}_o, \ldots, \underline{x}_{\underline{s}})$

mit $C^o = C^1 = c_o$, $A^o = A^1 = a_o$, $\eta_i^1 = \eta_{io}$,

$\underline{\eta}^1(\underline{x}_o, \ldots, \underline{x}_{\underline{s}}) = \sum_{j=o}^{\underline{s}} \underline{\eta}_{jo}(\underline{x}_j)$.

Durch sukzessives Einsetzen der oben aufgeführten Gleichungen für $\underline{x}_j$ (bzw. Y_m) folgt jetzt durch vollständige Induktion, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Beziehung besteht:

(n) $$B^n Y_o + \sum_{l=o}^{t'} \rho_l^n(y_l) + \underline{\rho}^n(Y_o, \ldots, Y_{\underline{t}})$$

$$= C^n + A^n x_o + \sum_{i=o}^{t'} \eta_i^n(x_i) + \underline{\eta}^n(\underline{x}_o, \ldots, \underline{x}_{\underline{s}}).$$

mit den Abschätzungen für $n \geq 1$.

(a) $|A^n - A^{n-1}|, |B^n - B^{n-1}|, |C^n - C^{n-1}| \leq \theta^{n-1}$;

(b) $|\eta_i^n - \eta_i^{n-1}| < \theta^{n-1}$,

$|\rho_l^n - \rho_l^{n-1}| < \theta^{n-1}$;

(c) $|\underline{\eta}^n|, |\underline{\rho}^n| < \theta^n$;

und zusätzlich:

(d) Für $\underline{\eta}^n(\underline{x}_o, \ldots, \underline{x}_{\underline{s}}) = \sum_{j=o}^{\underline{s}} \underline{\eta}_j^n(\underline{x}_j)$

und $\underline{\varrho}^n(\underline{y}_o, \ldots, \underline{y}_{\underline{t}}) = \sum_{m=o}^{\underline{t}} \underline{\varrho}_m^n(\underline{y}_m)$

ist $\|\underline{\eta}_j^n\| < r_{\underline{j}o}$ und $\|\underline{\varrho}_m^n\| < R_{\underline{m}o}$ für alle j und m.

und $\|\eta_i^n\| < r_{io}$ und $\|\rho_1^n\| < R_{1o}$ für alle i und 1.

Der Induktionsschluß für (a), (b) und (c) ist leicht durchzuführen. Ebenso für (d), man beachtet dabei lediglich die Beziehungen für die Radienverhältnisse aus §1. So ist etwa $\underline{\varrho}_m^{n+1}$ durch Abschätzen von $\underline{\eta}_j^n$ und den in x_j auftretenden Termen $\varrho_{mj}(y_m)$:

$$\|\underline{\varrho}_m^{n+1}\| < R_{\underline{m}j} \cdot r_{\underline{j}o} = R_{\underline{m}j} \cdot R_{j\underline{o}} \leq R_{\underline{m}o}$$

und analog

$$\|\underline{\eta}_j^{n+1}\| < r_{\underline{j}m} \cdot R_{\underline{m}o} = r_{\underline{j}m} \cdot r_{mo} \leq r_{\underline{j}o}.$$

Die Abschätzungen (a) bis (c) zeigen, daß wir durch Übergang zu den Grenzwerten der auftretenden Cauchyfolgen in A(D) zu eine Gleichung der Form

$$B \cdot y_o + \sum_{1=o}^{t'} \rho_1(y_1) = C + Ax_o + \sum_{i=o}^{s'} \eta_i(x_i) =: z$$

kommen, die wegen (d) die Abschätzungen

$\|\rho_1\| < R_{1\underline{o}}$, $\|\eta_i\| < r_{io}$ und $|C| \leq 1$, $|A| = |B| = 1$ zuläßt.

Nach Satz I.1 ist z eine Koordinate auf $X \subset \mathbb{P}^1_k(z)$.

Dagegen ist z keine Koordinate auf Y. Wir zeigen aber, daß für geeignete b, $\delta \in \mathring{k}$, $|\delta| = R_{\underline{oo}}$, $z^o := \frac{\delta}{z - b}$ diese Eigenschaft hat.

Somit ist $Y \subset \mathbb{P}^1_k(z^o) = \mathbb{P}^1_k(z)$.

Wir können von $y_o = \frac{\delta}{y_o - \underline{a}_o}$ ausgehen. Da z eine Koordinate auf D ist, gibt es nach Satz I,1 ein $b \in \mathring{k}$, so daß die Reihe

$$z^o = \frac{\delta}{z - b} = B^{-1}(y_o - \underline{a}_o) \cdot \sum_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu \cdot B^{-\nu} \cdot \rho^\nu$$

mit

$$\rho = \left(\frac{y_o - \underline{a}_o}{\delta}\right)\left(-b + \sum_{1=o}^{t'} \rho_1(y_1)\right) \text{ konvergiert.}$$

Offenbar ist ρ und daher z^o aus A(Y). Nach Satz I.1 ist aufgrund der Abschätzungen für $\rho_1(y_1)$ z^o eine Koordinate auf Y und D.

Nun haben wir D, X und Y in den $\mathbb{P}^1_k(z)$ eingebettet. Wir wollen das durch D^z, X^z und Y^z kennzeichnen. Wir erhalten:

$$A(X^z) = k\langle z_o, \ldots, z_{s'}, z_{s'+1}, \ldots, z_s\rangle \quad \text{und}$$
$$A(Y^z) = k\langle z^o_o, \ldots, z^o_{t'}, z^o_{t'+1}, \ldots, z^o_t\rangle ,$$

wobei so durchnumeriert sei, daß in den affinen Reduktionen $\bar{k}[\bar{z}_i] = \bar{k}[\bar{x}_i]$ und $\bar{k}[\bar{z}^o_1] = \bar{k}[\bar{y}_1]$ gelte. Nach den vorangegangenen Ausführungen ist

$$A(D^z) = k\langle z_o, \ldots, z_{s'}, z^o, \ldots, z^o_{t'}\rangle$$

und damit

$$X^z \cap Y^z = D^z \quad \text{in } \mathbb{P}^1_k(z).$$

Somit ist $X \cup Y$ isomorph zu $X^z \cup Y^z$. Da die Vereinigung zweier gelochter Scheiben mit nichtleerem Durchschnitt in $\mathbb{P}^1_k(z)$ wieder eine gelochte Scheibe oder der $\mathbb{P}^1_k(z)$ ist, haben wir alles bewiesen.

Man sieht leicht, daß der Fall $X^z \cup Y^z = \mathbb{P}^1_k(z)$ genau dann eintritt, wenn $s = s'$ und $t = t'$ ist.

Unter den Voraussetzungen wie im Satz mit dem Unterschied, daß $X \cap Y = \bigcup_{i=1}^{d} D_i$ ist, erhalten wir:

Korollar II.1.1: Zu jedem i, $1 \leq i \leq d$, gibt es ein z_i, so daß X, Y als gelochte Scheiben in den $\mathbb{P}^1_k(z_i)$ eingebettet werden können, so daß

$$X^{z_i} \cap Y^{z_i} = D_i^{z_i} \quad \text{ist.}$$

Der Beweis zu Satz II.1 beweist das Korollar. Die Approximation in $A(D_i)$ 'dreht' die anderen Komponenten auseinander. Wir setzen $X^i := X^{z_i}$ bzw. $Y^i := Y^{z_i}$ und nennen $X^i \cup Y^i$ die Verheftung von X und Y längs D_i. Wir haben einen kanonischen Morphismus

$$p^i : X^i \cup Y^i \to X \cup Y.$$

$p^i\big|_{X^i}$ und $p^i\big|_{Y^i}$ sind Isomorphismen und es gilt $(p^i)^{-1}(D_i) = D_i^i$, dagegen $(p^i)^{-1}(D_j) = D_j^i(X) \cup D_j^i(Y)$ für $i \neq j$, wobei $D_j^i(X) \subset X^i$ und $D_j^i(Y) \subset Y^i$ unter p^i isomorph auf D_j abgebildet werden.

Eine leichte Verallgemeinerung von Satz II.1 und dem oben vorbereitenden Lemma 3.1 von zwei auf drei Überdeckungsmengen ist folgende Aussage.

Korollar II.1.2: Sind X_1, X_2 und X_3 gelochte Scheiben und ist $Z = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ ein separierter analytischer Raum, so gibt es für jede Komponente D_1, $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \supset D_1 \neq \emptyset$, ein z_1, daß jedes X_i in den $\mathbb{P}^1_k(z_1)$ als X_i^1 eingebettet werden kann und

$$X_1^1 \cap X_2^1 \cap X_3^1 = D_1^1 \quad \text{ist.}$$

Z ist eine gelochte Scheibe in $\mathbb{P}^1_k(z_1)$ oder der $\mathbb{P}^1_k(z_1)$.

§4. Überdeckungseigenschaften

Nun sind alle Mittel bereitgestellt, um zu unseren analytischen Räumen besonders übersichtliche Überdeckungen zu konstruieren. Ist $X = \mathbb{P}_k^1(x)$, so soll stets die Überdeckung $\{\{x||x| \leq 1\}, \{x||x| \geq 1\}\}$ aus affinoiden Kreisscheiben genommen werden.
Für $X \neq \mathbb{P}_k^1$ erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz II.2: Sei X ein lokal einfacher, zusammenhängender, separierter, geschlossener k-analytischer Raum ($\neq \mathbb{P}_k^1$), so gibt es eine eigentliche Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, $n \geq 2$, von X aus s_i-fach gelochten Scheiben mit den Bedingungen

(1) $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$ für paarweise verschiedene i, j, k;

(2) $U_i \cap U_j = \emptyset$ oder $\bigcup_{l=1}^{d_{ij}} \partial_l(U_i)$ bzw. (U_j) für $i \neq j$;

(3) Zu jeder Randkomponente $\partial_k(U_i)$ gibt es ein $U_j \neq U_i$ mit $U_i \cap U_j \supset \partial_k(U_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$;

(4) $d_{ij} \geq 2$ $\forall$ $i \neq j$, insbesondere $s_i \geq 1$ für alle $0 \leq i \leq n$.

Beweis: Wir wissen bereits, daß X eine endliche Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_1, \ldots, V_s\}$ aus gelochten Scheiben besitzt mit einer echten Schrumpfung $\mathfrak{V}' = \{V_1', \ldots, V_s'\}$.

Im ersten Beweisschritt vergessen wir, daß $\mathfrak{V}$ eine Schrumpfung $\mathfrak{V}'$ besitztund konstruieren induktiv zu $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung $\mathfrak{U}'$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Aus der Geschlossenheit des Raumes X folgern wir dann erst die Bedingung (3), um im letzten Teil des Beweises durch Vergrößern der Überdeckungsmengen von $\mathfrak{U}'$ zu einer Überdeckung $\mathfrak{U}$ zu gelangen, die alle vier Eigenschaften erfüllt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich $\mathfrak{U}$ weit entfernt von einer Eindeutigkeitsaussage befindet und $X = \mathbb{P}_k^1$ ausgeschlossen wurde, da die Bedingung (4) in $\mathbb{P}_k^1$ niemals erfüllt sein kann, weil gelochte Scheiben dort immer einen zusammenhängenden Durchschnitt haben.

Außerdem bemerken wir, daß für zwei Überdeckungsmengen V_i und V_j mit $V_i \cap V_j = \bigcup_{l=1}^{d} D_l$ die kanonische Vereinigungen $V_i^1 \cup V_j^1$ in $\mathbb{P}_k^1(z_1)$ nach Korollar II.1.1 niemals der ganze $\mathbb{P}_k^1$ sein können, denn sonst folgern wir, daß $X = \mathbb{P}_k^1$ ist :

Aus 3.1 und der Abschlußbemerkung von Satz II.1 entnehmen wir, daß aus $V_i^1 \cup V_j^1 = \mathbb{P}_k^1$ auch $V_i \cup V_j = \mathbb{P}_k^1$ folgt.

Wir können deshalb V_i und V_j durch zwei affinoide Kreisscheiben K_i und K_j ersetzen. Da X zusammenhängend ist, gibt es eine dritte Überdeckungsmenge V_m mit $V_m \cap K_i \neq \emptyset$. Dieser Durchschnitt ist nach 3.2 zusammenhängend. Ist $V_m \cup K_i$ ein Teilbereich und nicht der $\mathbb{P}_k^1$, so ist $V_m \cup K_i \cup K_j = \mathbb{P}_k^1$, ansonsten ersetzen wir V_m durch eine Kreisscheibe K_m mit $K_m \cap K_i = K_j \cap K_i$. Mit Lemma 3.1 und 1.2 folgt für diese separierte Verheftung $K_m = K_j$ und schließlich mit Induktion $X = \mathbb{P}_k^1$.

(1) Die Existenz eines $\mathfrak{U}'$ zeigen wir durch mehrmalige vollständige Induktion.

(a) Zuerst über die Anzahl der V_i.

$\{V_1\}$ ist offensichtlich eine Überdeckung von V_1, die (1) und (2) erfüllt.

Sei $\mathfrak{U}_r' := \{U_0' := V_1, U_1', \ldots, U_t'\}$ eine Überdeckung von $\bigcup_{i=1}^{r-1} V_i$, $r \geq 2$, die die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt.

(b) Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion über die Komponentenzahl von $U_o' \cap V_r = \bigcup_{j=1}^{d} D_j$, daß zu $U_o' \cup V_r$ eine Überdeckung mit den Bedingungen (1) und (2) existiert. Zu D_1 existiert eine Koordinate z_1 nach Korollar II.1.1, so daß U_o', V_r in den $\mathbb{P}_k^1(z_1)$ als $U_o'^1$, V_r^1 eingebettet werden können mit der Eigenschaft $U_o'^1 \cap V_r^1 = D_1^1$. Wenden wir Lemma 2.1 auf $U_o'^1 \cup V_r^1$ an, so bekommen wir eine Überdeckung $\{U_o'^1, V_{r1}^1, \ldots, V_{rs}^1\}$, die (1) und (2) erfüllt. Unter dem lokalen Isomorphismus

$$p^1 : U_o'^1 \cup V_r^1 \to U_o' \cup V_r$$

erhalten wir eine Überdeckung $\{U_o', V_{r1}, \ldots, V_{rs}\}$ ($V_{ri} = p^1(V_{ri}^1) = V_{ri}^1$) von $U_o' \cup V_r$ mit den Eigenschaften

$$U_o' \cap V_{ri} \subset \partial_i(U_o') \cup \bigcup_{j=2}^{d} D_j$$

$$V_{ri} \cap V_{rj} = \emptyset,\ i \neq j,\ (p^1 | V_{ri} \text{ ist ein Isomorphismus}).$$

Sei jetzt $\{U_o', W_1, \ldots, W_T\}$ eine Überdeckung von $U_o' \cup V_r$, die folgendes erfüllt:

(I) $W_i \subset V_r$, $1 \leq i \leq T$;

(II) je drei Überdeckungsmengen haben höchstens einen Durchschnitt, der in $\bigcup_{j=R}^{d} D_j$ liegt;

(III) zwei Überdeckungsmengen schneiden sich höchstens in Rändern und einer Teilmenge von $\bigcup_{j=R}^{d} D_j$.

Liften wir diese Überdeckung jetzt unter

$$p^R : U_o'^R \cup V_r^R \to U_o' \cup V_r$$

nach $U_o'^R \cup V_r^R$ und wenden darauf Lemma 2.2 an, um die erhaltene Verfeinerung anschließend unter p^R wieder auf $U_o' \cup V_r$ herunterzunehmen, so erhalten wir eine Überdeckung $\{U_o', \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_{\tilde{T}}\}$ von $U_o' \cup V_r$, die die oben aufgeführten Bedingungen I, II, III für $\tilde{R} = R + 1$ erfüllt. Damit ist der

Teil (b) bewiesen.

(c) Betrachten wir jetzt $\mathcal{U}'_r \cup \{V_r\} = \{U'_0, \ldots, U'_t, V_r\}$.
Durch vollständige Induktion über die Anzahl der U'_i wollen wir diese Überdeckung zu dem gewünschten $\mathcal{U}'_{r+1}$ verfeinern. Nach Teil (b) gibt es eine Verfeinerung $\{U'_0, \ldots, U'_t, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_{\bar{L}}\}$, so daß $\{U'_0, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_{\bar{L}}\}$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Nehmen wir an $\{U'_0, \ldots, U'_\rho, W_1, \ldots, W_L\}$ erfülle die Bedingungen (1) und (2).

Wir zeigen den Induktionsschritt von ρ auf $\rho + 1$ und von r auf $r + 1$. Wir führen mit $U'_{\rho+1}$, W_i, $1 \leq i \leq L$, falls $U'_{\rho+1} \cap W_i \neq \emptyset$ ist, den unter (b) beschriebenen Prozeß durch und erhalten eine Überdeckung

$$\{U'_0, \ldots, U'_\rho, U'_{\rho+1}, W_{11}, \ldots, W_{1s(1)}, \ldots, W_{L1}, \ldots, W_{Ls(L)}\},$$

die die Bedingung (2) aufgrund der Konstruktion in 2.1 bzw. 2.2 erfüllt. Wegen der Induktionsannahmen und der Konstruktion in (b). kann höchstens

$$U'_{\rho+1} \cap U'_j \cap W_{ik} \neq \emptyset, \; j < \rho + 1,$$

$$U'_{\rho+1} \cap W_{ij} \cap W_{kl} \neq \emptyset, \; i \neq k,$$

und $$U'_j \cap W_{ik} \cap W_{il} \neq \emptyset, \; j < \rho + 1, \; k \neq l,$$

einen nicht verschwindenden Durchschnitt haben.
Wir untersuchen nur den ersten und dritten Fall, da der zweite keinen anderen Gesichtspunkt verlangt.

Sei $\partial \subset U'_{\rho+1} \cap U'_j \cap W_{ik}$ eine Randkomponente von $U'_{\rho+1}$, U'_j und W_{ik} und damit auch von W_i, da $U'_j \cap W_i \supset U'_j \cap W_{ik} \supset \partial$ und sich U'_j und W_i nach Induktionannahme nur in Randkomponenten schneiden. Liften wir nach Korollar II.1.2

$U'_{\rho+1}$, U'_i, W_i in einen $\mathbb{P}^T_k(z_\partial)$ zu $U'^{\partial}_{\rho+1}$, U'^{∂}_j, W^{∂}_i, so daß $U'^{\partial}_{\rho+1} \cap U'^{\partial}_i \cap W^{\partial}_i = \partial$ ist, so haben wir nach Induktionsannahme, daß $U'^{\partial}_j \cap W^{\partial}_i = \partial = U'^{\partial}_j \cap U'^{\partial}_{\rho+1}$ ist. Aus Lemma 2.3 entnehmen wir somit, daß ∂ eine Randkomponente von $U'^{\partial}_{\rho+1} \cup W^{\partial}_i$ sein muß. Nach Lemma 2.1 bzw. 2.2 jeweils (3) kann dann aber ∂ kein Rand von W_{ik} für ein k sein.

Betrachten wir den dritten Fall.

Sei ∂ eine gemeinsame Randkomponente von W_{ik}, W_{il} und U'_j, dann ist, da W_{ij}, $W_{ik} \subset W_i$, ∂ wie oben auch eine Randkomponente von W_i. Da ∂ nach Konstruktion keine Randkomponente von $U'_{\rho+1}$ ist (b), ist ∂ Randkomponente von jedem $U'^{1}_{\rho+1} \cup W^1_i$, wobei 1 die Komponenten von $U'_{\rho+1} \cap W_i$ durchläuft. Dann kann aber nach (3) in 2.2 ∂ nicht im Durchschnitt von $W_{ij} \cap W_{ik}$ liegen.
Für $\rho = t - 1$ ist die oben angegebene Überdeckung unser gesuchtes $\mathfrak{U}'_{r+1}$.

(2) Wir zeigen jetzt, daß unser $\mathfrak{U}' = \{U'_1, \ldots, U'_n\}$ der Bedingung (3) genügt. $\mathfrak{U}'$ ist eine Verfeinerung von $\mathfrak{V}$, das eine echte Schrumpfung $\mathfrak{V}'$ besitzt.
Sei $U' \in \mathfrak{U}'$ und $U' \subset V_1 \in \mathfrak{V}$. Sei weiter ∂ eine Randkomponente von U'. Wir können annehmen, daß $\partial \subset \mathring{V}_1$ ist.
Dann ist sonst $\partial \subset \partial V_1$ - im Nichtarchimedischen gibt es nur diese beiden Fälle, so ist ∂ in einem V'_i, $i > 1$, enthalten und damit gilt wegen $V'_i \subset \mathring{V}_i$: $\partial \subset \mathring{V}_i$. Sei also $\partial \subset \mathring{V}_1$.

Wir betrachten die Überdeckung $\{(U'_i \cap V_1), 0 \le i \le n'\}$ von V_1 aus affioniden Teilbereichen von V_1 in $\mathbb{P}^1_k(v_1)$.
Es ist $V_1 = \bigcup_{i=1}^{n'} (U'_i \cap V_1)$.
Da $\mathfrak{U}'$ die Bedingung (2) in Satz II.2 erfüllt, ist $(U' \cap V_1) \cap (U'_i \cap V_1)$ leer oder <u>eine</u> Komponente von $\partial(U')$

für alle $U_i' \neq U'$.

Wird ∂ nicht von einem $U_i' \cap V_1$ und damit von einem U_i' getroffen, so können wir sofort im Widerspruch zu $\partial \subset \overset{\circ}{V}_1$ mit 2.2 (3) auf $\partial \subset \partial V_1$ schließen, da wir eine wohlvertraute Situation in $\mathbb{P}_k^1$ vorliegen haben.

(3) Die Bedingung (4) fordert eine 'Maximalität' der Überdeckung in dem Sinn, daß die Vereinigung zweier Überdeckungsmengen mit nicht leerem Durchschnitt nicht als Teilbereich in einem $\mathbb{P}_K^1$ eingebettet werden kann.

Wir beschreiben wieder ein induktives Verfahren.

Wir nehmen an, $\mathcal{U}'$ erfülle nicht die Bedingung (4), so gibt es einen kleinsten Index j, $1 \leq j \leq n'$, so daß $U_j' \cap U_m'$ für ein $m \neq j$ zusammenhängend ist. Sei

$m := \min \{i \mid i \neq j,\ U_i' \cap U_j' \text{ ist zusammenhängend},\ 0 \leq i \leq n'\}$

Wir setzen : $\mathcal{U}_1 := \{U_1', \ldots, U_{j-1}', U_j' \cup U_m', \ldots, U_{m-1}', U_{m+1}', \ldots, U_{n'}'\}$

$U_j' \cup U_m'$ ist nach Satz II.1 wieder eine gelochte Scheibe, da nicht der P_k^1 entstehen kann, weil sonst $X = \mathbb{P}_k^1$ folgt, was wir ausgeschlossen haben.

In offensichtlicher Weise setzen wir dieses Verfahren fort, bis wir nach endlich vielen Schritten zu einer Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$$

gelangen, die die Forderung (4) erfüllt. $s_i \geq 1$ folgt sofort aus Lemma 3.2. Da X keine gelochte Scheibe sein kann, ist auch n immer größer oder gleich 2. Die Bedingungen (1), (2) und (3) sind für $\mathcal{U}$ immer noch erfüllt, da der Rand von $U_j' \cup U_m'$ ($U_j' \cap U_m' = \partial$) nach den Darstellungen von $U_j'^{\partial}$ und $U_m'^{\partial}$ in $\mathbb{P}_k^1(z_\partial)$ in Satz II.1 gleich der Vereinigung aller Randkomponenten von U_j' und U_m' ist außer der Verheftungs-

§5. Fundamentalgruppe

Satz II.2 gibt die topologische einfache Struktur der hier betrachteten analytischen Räume wieder und erlaubt eine abstraktere Betrachtungsweise des analytischen Raumes mit einer ausgezeichneten Überdeckung als endlicher Graph.

Für Räume, die eine Grothendieck Topologie tragen, kann eine allgemeine Überlagerungstheorie hergeleitet werden, die den Begriff der Fundamentalgruppe sinnvoll auf solche Räume ausdehnt. Wir folgen hier der Darstellung in [22], ersetzen allerdings, da dort ein allgemeiner Fall für nicht verschwindende 2-Nerven der auftretenden Überdeckungen behandelt wird, den Begriff des Flächenkomplexes durch den des Graphen.

Sei X ein lokal einfacher, zusammenhängender, separierter analytischer Raum und $\mathfrak{U} = \{U_i, i \in I\}$ eine Überdeckung von X aus gelochten Scheiben, die die Bedingungen (1) und (2) in Satz II.2 erfüllt.

Dem Paar $(X, \mathfrak{U})$ ordnen wir folgenden Graphen $G_{X\mathfrak{U}}$ zu:

(0) Jedes U_i entspricht genau einer Ecke P_i des Graphen, $i \in I$;

(1) Ist $U_i \cap U_j = \overset{d_{ij}}{\underset{k=0}{\cup}} D_{ij,k}$, so entspricht $D_{ij,k}$ für $i \neq j$ und jedem k einer Kante $e_{ij,k}$ von P_i nach P_j. $e_{ji,k}$ sei die dazu inverse Kante.

Die Unterscheidung zwischen $e_{ij,k}$ und $e_{ji,k}$ werden wir nur bei gruppentheoretischen Betrachtungen machen, sonst verstehen wir unter $e_{ij,k}$ immer eine ungerichtete Kante zwischen den Ecken P_i, P_j bzw. P_j, P_i.

$G_{X\mathfrak{U}}$ ist ein zusammenhängender Graph. Das folgt sofort aus dem Zusammenhang von X.

Ist $q(X, \mathfrak{U})$ die zyklomatische Zahl von $G_{X\mathfrak{U}}$, so ist die Fundamentalgruppe des Graphen eine freie Gruppe in q Erzeugenden:

$$\pi_1(G_{X\mathfrak{U}}) = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_q \rangle =: \Gamma_q$$

Dabei bezeichnen wir mit γ_i gerichtete Kanten von $G_{X\mathfrak{U}}$, die nicht in einem fest vorgegebenen maximalen Baum $B_{X\mathfrak{U}} \subset G_{X\mathfrak{U}}$ liegen. γ_i^{-1} ist die zu γ_i inverse Kante.

Wir definieren die Fundamentalgruppe von X :

$$\pi_1(X) := \pi_1(G_{X\mathfrak{U}}) = \Gamma_q$$

und nennen X einfach zusammenhängend, falls $\pi_1(X) = 0$ ist.

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Überdeckung $\mathfrak{U}$, da die Überdeckungsmengen U_i in den Begriffen von [22] , 3.20 einfach kettenzusammenhängend sind und damit jedes $\mathfrak{U}$ eine wesentliche Überdeckung von X ist([22] , 3.19, 3.23).

Da die zulässigen Überdeckungen einer gelochten Scheibe die endlichen Überdeckungen $\{V_i, i = 1, \ldots, m\}$ aus zusammenhängenden affinoiden Teilbereichen des $\mathbb{P}^1_k$ sind, erhält man die Trivialität aller Kettenwege leicht daraus, daß für je drei Indizes i_1, i_2, i_3 aus $V_{i_k} \cap V_{i_j} \neq \emptyset$, k, j = 1, 2, 3, stets $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap V_{i_3} \neq \emptyset$ folgt, da wir k algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt haben.

Als Beispiele für einfach zusammenhängende Räume erhalten wir neben den gelochten Scheiben den $\mathbb{P}^1_k$.

Sei zur Demonstration $\mathfrak{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ eine Überdeckung der gelochten Scheibe S, die die Bedingungen (1) und (2) in Satz II.2 erfüllt.

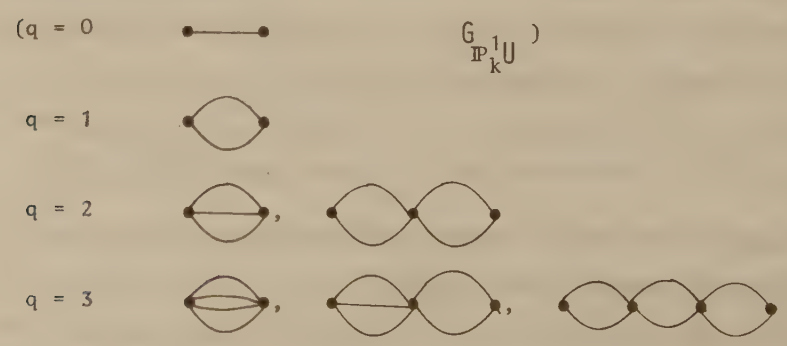
Ist dann $(e_{12,k_1}, e_{23,k_2}, \cdots, e_{n-1\,n,k_{n-1}}, e_{n1,k_n})$ ein nicht trivialer einfach geschlossener Weg in G_{SU}, so folgt, daß

$$(\bigcup_{i=2}^{n} U_i =: U) \cap U_1 = D_{12,k_1} \cup D_{n1,k_n}$$

ist. Da aber $U_1 \cap U_2 \cap U_n = \emptyset$ ist, muß $D_{12,k_1} \cap D_{n1,k_n} = \emptyset$ sein. Das widerspricht aber der Tatsache, daß zwei gelochte Scheiben U und U_1 in $S \subset \mathbb{P}^1_k$ nur einen zusammenhängenden Durchschnitt haben können. Also ist $\pi_1(G_{SU}) = 0$.

Eine weitere Klasse einfach zusammenhängender Räume sind die unbeschränkten Steinschen Gebiete in $\mathbb{P}^1_k$, auf die wir weiter unten eingehen werden.

Sei nun X wieder wie im Hauptsatz gewählt.
Wir nennen die zyklomatische Zahl q(X) von G_{XU} das <u>topologische Geschlecht</u> von X. Wir werden weiter unten nachweisen, daß q(X) gleich dem algebraischen Geschlecht der Mumford-Kurve X ist. Betrachten wir für X nur die standardisierten Überdeckungen aus Satz II.2, so erhalten wir für q = 1, 2, 3 folgende mögliche Überdeckungsgraphen:



Die Bedingung (4) in Satz II.2 bewirkt, daß G_{XU} stachelfrei ist (jede Ecke wird von mindestens zwei Kanten getroffen) und

$$q \geq n - 1 \quad (n \geq 2) \text{ ist.}$$

Die Bedingung (2) ermöglicht uns vom Graphen auf den Rang der Überdeckungsmenge zurückzuschließen. Sicherlich gilt:

$$\text{Rang } U_i = 1 + s_i \geq \text{ord } P_i \geq 2,$$

wobei U_i eine s_i-fach gelochte Scheibe mit $1 + s_i$ Randkomponenten ist und ord P_i die Anzahl der (ungerichteten) Kanten in G_{XU} bezeichnet, die die Ecke P_i treffen.

Wir haben sogar, da wir nur geschlossene Räume betrachten, nach (3) in Satz II.2:

$$\text{Rang } U_i = \text{ord } P_i,$$

da zu jeder Randkomponente von U_i ein $U_j \neq U_i$ existiert, das diese Randkomponente mit U_i gemeinsam hat.

Kap. III. DIE UNIVERSELLE ÜBERLAGERUNG ALS UNBESCHRÄNKTES STEINSCHES GEBIET VON $\mathbb{P}_k^1$

In diesem Abschnitt konstruieren wir zu X einen Steinschen Raum $\tilde{X}$, der den analytischen Raum X überlagert, also lokal X entspricht. Die Decktransformationsgruppe von $\tilde{X}$ über X ist isomorph zu der in §5 definierten Fundamentalgruppe Γ_q von X. Anschließend betten wir $\tilde{X}$ als unbeschränktes Steinsches Gebiet in den $\mathbb{P}_k^1$ ein und setzen die Decktransformationen zu Automorphismen des $\mathbb{P}_k^1$ fort. Damit ist $\tilde{X}$ ein unbeschränktes Steinsches Gebiet in $\mathbb{P}_k^1$ mit einer Automorphismengruppe Γ_q aus gebrochen linearen Transformation, die isomorph zu der Fundamentalgruppe von X ist. In §8 zeigen wir, daß diese Gruppe eine Schottky-Gruppe ist und $\tilde{X}$ den Bereich der zugehörigen gewöhnlichen Punkte darstellt. Aus [6] entnehmen wir dann, daß der Quotient $\tilde{X}/\Gamma_q$ eine nicht-singuläre projektiv-algebraische Kurve vom Geschlecht q(X) ist.

Wir geben zuerst eine kurze Zusammenfassung der Definitionen und Ergebnisse aus der Überlagerungstheorie von Räumen, die mit einer Grothendieck Topologie versehen sind ([22] oder [9], IV, §3). Sei X wie im Hauptsatz gewählt und $\mathfrak{U}$ wie in Satz II.2.

Definition: Ein zusammenhängender analytischer Raum Y heißt zusammen mit einer analytischen Abbildung

$$p : Y \to X$$

eine (zusammenhängende) Überlagerung von X bezüglich $\mathfrak{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, falls

(1) für alle i eine zulässige Überdeckung $\{U_i^j,\ j \in J(i)\}$ von $p^{-1}(U_i)$ existiert mit $U_i^j \cap U_i^{j'} = \emptyset$ für alle $j \neq j' \in J(i)$;

(2) $p|U_i^j \to U_i$ bianalytisch ist für alle $j \in J(i)$ und alle i.

Da Y zusammenhängend ist, können wir $J := J(i) = J(i')$ für alle $0 \leq i, i' \leq n$ annehmen. $\{U_i^j,\ 0 \leq i \leq n,\ j \in J\}$ ist eine zulässige Überdeckung von Y. Da $\mathfrak{U}$ wie in Satz II.2 gewählt ist, also eine wesentliche Überdeckung von X ist, ist jede Überlagerung von X bezüglich irgendeiner Überdeckung eine Überlagerung von X bezüglich $\mathfrak{U}$([22], 3.19, 3.23). Wir sprechen daher nur noch von einer Überlagerung von X.

Definition: Eine Überlagerung $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ von X heißt universell, falls zu jeder Überlagerung $p : Y \to X$ eine analytische Abbildung $g_y : \tilde{X} \to Y$ existiert mit $\tilde{p} = p \circ g_y$.

Eine universelle Überlagerung ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ([22], 3.3) und existiert stets für unsere Räume, da eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ aus einfach (ketten)-zusammenhängenden Überdeckungsmengen, den gelochten Scheiben, existiert (§5; [22], 3.19, 3.23).

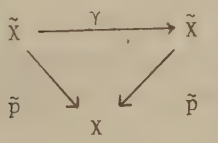
Nach [22], 3.22, ist eine Überlagerung $p : Y \to X$ genau dann universell, wenn Y einfach zusammenhängend ist.

Wir erhalten jetzt bereits eine Aussage:

$$X = \tilde{X} \Leftrightarrow q(X) = 0 \Leftrightarrow X = \mathbb{P}_k^1.$$

Aus §5 folgt, daß $q(\mathbb{P}_k^1) = 0$ ist. Außerdem erhalten wir mit Satz II.2, daß für $X \neq \mathbb{P}_k^1$ $q(X) \geq 1$ ist.

Die Fundamentalgruppe Γ_q von X operiert als Decktransformationsgruppe fixpunktfrei auf $\tilde{X}$:



$\tilde{p} = \tilde{p} \circ \gamma,$

$\gamma \in \pi_1(X) = \Gamma_q$. Γ_q operiert einfach transitiv auf jeder Faser von $\tilde{p}$, so daß wir $J = |\Gamma_q|$ setzen und die Operation auf der Faser als Translation der Gruppe beschreiben können ([22], 3.c.). X entspricht dem Bahnenraum von $\tilde{X}$ mudulo Γ_q : $X = \tilde{X}/\Gamma_q$.

Die gesamte Überlagerungtheorie läßt sich rein graphentheoretisch behandeln [22], §5:

> Ist $\mathcal{U}$ wie oben gewählt, so ist die Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von X äquivalent zur Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen von $G_{X\mathcal{U}}$.

Wir nutzen diesen Zusammenhang zur Konstruktion der universellen Überlagerung für X aus.

Sei $\tilde{G}_{X\mathcal{U}} \xrightarrow{\pi} G_{X\mathcal{U}}$ die universelle Überlagerung des Graphen $G_{X\mathcal{U}}$ mit der Decktransformationsgruppe $\Gamma_q = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_q \rangle$. Sei weiter $\{p_i^\gamma,\ 0 \leq i \leq n,\ \gamma \in \Gamma_q\}$ das System aller Ecken von $\tilde{G}_{X\mathcal{U}}$ mit $\pi(P_i^\gamma) = P_i$. Die Aktion von Γ_q auf $\pi^{-1}(P_i)$ werde durch

$$\gamma' \cdot p_i^\gamma := p_i^{\gamma' \cdot \gamma}$$

beschrieben. Wir konstruieren jetzt $\tilde{X}$.

Sei

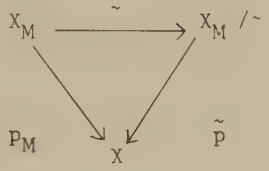
$$X_M = \bigcup_{\text{disj.}} U_i^\gamma\ ,\ \gamma \in \Gamma_q,\ 0 \leq i \leq n,$$

mit $U_i^\gamma := U_i$ für alle γ und alle i. Sei $p_M : X_M \to X$ durch $p_M | U_i^\gamma := id_{U_i}$ definiert.

Wir erklären auf X_M eine Äquivalenzrelation, seien $x, y \in X_M$:

$x \sim y \Leftrightarrow$ Es gibt $\gamma, \gamma', i, j, i \neq j$, mit $x \in U_i^\gamma$ und $y \in U_j^{\gamma'}$ und eine Kante $e_{ij,k}^{\gamma\gamma'}$ in $\tilde{G}_{X\mathcal{U}}$ von P_i^γ nach $P_j^{\gamma'}$ mit $\pi(e_{ij,k}^{\gamma\gamma'}) = e_{ij,k}$, so daß $p_M(x) = p_M(y) \in D_{ij,k}$ ist.

Wir setzen $\tilde{X} := X_M/\sim$, $\tilde{p}$ wird sinnvoll durch die Kommutativität des Diagramms:



definiert. Die Äquivalenzklasse eines $x \in X_M$ besteht entweder aus zwei oder einem Punkt, je nach dem, ob $p_M(x)$ auf einem Rand eines U_i - und damit auch auf dem Rand genau eines U_j, $j \neq i$, liegt oder nicht, wie aus Satz II.2 hervorgeht.

$\tilde{X}$, $\tilde{p}$ ist eine zusammenhängende Überlagerung von X.
Die Eigenschaft (1) folgt daraus, daß keine Kante von P_i^γ nach $P_i^{\gamma'}$ in $\tilde{G}_{XU}$ existiert, somit $U_i^\gamma \cap U_i^{\gamma'} = \emptyset$ ist für alle i und $\gamma \neq \gamma'$.
Die Eigenschaft (2) folgt aus der Definition von p_M. $\tilde{X}$ ist offenbar zusammenhängend (Kapitel II), weil G_{XU} zusammenhängend ist, ebenso lokal einfach und separiert, da U_i^γ und U_j^γ längs eines zusammenhängenden Durchschnittes von U_i und U_j verheftet wurden, also $A(U_i^\gamma \cap U_j^{\gamma'})$ ein Summand von $A(U_i \cap U_j)$ ist. Da X separiert ist, ist somit auch $\tilde{X}$ separiert. $\tilde{p}$ ist offensichtlich analytisch.

$\tilde{X}$ besitzt die Überdeckung $\tilde{U} := \{U_i^\gamma,\ 0 \leq i \leq n,\ \gamma \in \Gamma_q\}$ mit dem Überdeckungsgraph $G_{\tilde{X}\tilde{U}} = \tilde{G}_{XU}$.

Da $\tilde{G}_{XU}$ ein Baum ist, erhalten wir:

$$\pi_1(\tilde{X}) = 0.$$

Die Decktransformationen Γ_q von $\tilde{G}_{XU}$ über G_{XU} werden zu Decktransformationen von $\tilde{X}$ über X. Wir bezeichnen beide mit Γ_q.

§6. Die universelle Überlagerung als Steinscher Raum

Den Begriff des Steinschen Raumes entnehmen wir aus [17]. Aus dem folgenden Satz und der Konstruktion der $\tilde{X}_i$ folgt leicht, daß $\tilde{X}_i \subset \overset{o}{\tilde{X}}_{i+1}$, also $\tilde{X}$ Steinsch ist.

Satz III.1: Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X besitzt eine Ausschöpfungsfolge

$$\tilde{X}_o \subsetneq \tilde{X}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{X}_\nu \subsetneq \dots$$

aus $\tilde{s}_\nu$-fach gelochten Scheiben mit $\tilde{X} = \bigcup_{\nu=o}^{\infty} \tilde{X}_\nu$ und $\tilde{s}_\nu = 2q(2q-1)^\nu - 1$.

Beweis: Wir konstruieren zuerst eine Ausschöpfungsfolge endlicher Bäume von $\tilde{G}_{X\mathcal{U}}$, um dann wieder auf $\tilde{X}$ zurückzuschließen.

Sei $B_{X\mathcal{U}}$ ein maximaler Teilbaum von $G_{X\mathcal{U}}$. Die Kanten, die nicht in $B_{X\mathcal{U}}$ enthalten sind, entsprechen den freien Erzeugenden der Fundamentalgruppe $\Gamma_q : \gamma_1, \dots, \gamma_q$.

Sei $\tilde{B}_o$ eine Liftung von $B_{X\mathcal{U}}$ nach $\tilde{G}_{X\mathcal{U}}$. Die Ecken aus $\tilde{B}_o$ seien $P_1^1, \dots, P_n^1$ (wir bezeichnen das neutrale Element von Γ_q mit 1). Es gibt genau 2q Kanten in $\tilde{G}_{X\mathcal{U}}$, die Ecken aus $\tilde{B}_o$ treffen, aber nicht in $\tilde{B}_o$ enthalten sind. Wir wollen diese Kanten kurz Anbindungskanten von $\tilde{B}_o$ nennen.

Ist $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_q, \gamma_q^{-1}\}$, so gibt es zu γ genau eine dieser Anbindungskanten, die eine Ecke aus $\tilde{B}_o$ mit einer Ecke aus $\gamma(\tilde{B}_o)$ verbindet, wie sofort aus den Eigenschaften der universellen Überlagerung $\tilde{G}_{X\mathcal{U}}$ folgt.

Wir nennen ein Element $\gamma = \gamma_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \cdot \dots \cdot \gamma_{j_o}^{\sigma_o} \in \Gamma$ ein reduziertes Wort der Länge $|\gamma| = \nu + 1$, falls für $1 \le j_i \le q$, $\sigma_i \in \{+1, -1\}$ aus $j_i = j_{i+1}$ stets $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ für $0 \le i \le \nu - 1$ folgt.

Das neutrale Element $1 \in \Gamma_q$ sei reduziert von der Länge 0.
Wir definieren:

$$\tilde{B}'_\nu := \bigcup_{|\gamma| \leq \nu} \gamma(\tilde{B}_o), \text{ für alle } \gamma \in \Gamma_q.$$

Sei $\tilde{B}_\nu$ der von $\tilde{B}'_\nu$ erzeugte Teilbaum in $\tilde{G}_{X\mathfrak{U}}$.
Offensichtlich gilt:

(1) $\tilde{B}_\nu \subsetneq \tilde{B}_{\nu+1}$ für $\nu \geq 0$;

(2) $\tilde{G}_{X\mathfrak{U}} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \tilde{B}_\nu$;

(3) $\tilde{B}_\nu$ besitzt genau $2q(2q-1)^\nu$ Anbindungskanten.

Die dritte Eigenschaft folgt daraus, daß es in Γ_q, wie man leicht mit vollständiger Induktion über ν sieht, genau $2q(2q-1)^\nu$ reduzierte Worte der Länge $\nu + 1$ gibt.

Wenden wir uns wieder dem analytischen Raum $\tilde{X}$ zu.
Wir zeigen, daß zu jedem $\tilde{B}_\nu$ eine gelochte Scheibe $\tilde{X}_\nu$ existiert, so daß

(1) $\tilde{X}_\nu \subsetneq \tilde{X}_{\nu+1}$ für $\nu \geq 0$;

(2) $\tilde{X} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \tilde{X}_\nu$;

(3) $\tilde{X}_\nu$ genau $2q(2q-1)^\nu$ Ränder besitzt.

Dem Baum $\tilde{B}_\nu$ in $G_{X\mathfrak{U}}$ entspricht ein analytischer Teilraum in $\tilde{X}$.
$\tilde{B}_\nu$ besitzt die Eckenmenge $\{P_i^\gamma$, für alle i, $1 \leq i \leq n$, $\gamma \in \Gamma_q$, $|\gamma| \leq \nu\}$.
Dementsprechend setzen wir:

$$\tilde{X}_\nu := \bigcup_{|\gamma| \leq \nu} U_i^\gamma, \quad 1 \leq i \leq n .$$

Wir weisen zuerst nach, daß $\tilde{X}_\nu$ eine gelochte Scheibe ist. Da $\tilde{B}_\nu$ zusammenhängend ist, ist es auch der analytische Raum $\tilde{X}_\nu$, da die U_i^γ entsprechend zu den Kanten in $\tilde{B}_\nu$ verheftet sind. Wir führen einen Induktionsschluß durch: Jedes U_i^γ ist nach Voraussetzung eine gelochte Scheibe. Sei U^{m-1} eine Vereinigung von m - 1 Überdeckungsmengen von $\tilde{X}_\nu$, die eine gelochte Scheibe ist. Da $\tilde{X}_\nu$ zusammenhängend ist, gibt es eine nicht in U^{m-1} enthaltene m-te Überdeckungsmenge U_i^γ, die mit U^{m-1} einen zusammenhängenden nicht leeren Schnitt hat, da $U_i^\gamma \cap U^{m-1} = U_i^\gamma \cap U_i^{\gamma'}$, ist,wie aus der Konstruktion von $\tilde{X}$ und der Eigenschaft, daß $\tilde{B}_\nu$ ein Baum ist, leicht folgt.

Satz II.1 zeigt dann die Behauptung, daß $U^m := U^{m-1} \cup U_i^\gamma$ eine gelochte Scheibe ist. Der $\mathbb{P}_k^1$ kann nicht entstehen, da sonst im Widerspruch zu $q \geq 1$ $X = \mathbb{P}_k^1$ wie oben folgen würde. Der Punkt (2) ist offensichtlich. Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{X}_\nu$ $2q(2q-1)^\nu$ Ränder hat.

Aus 2.2 entnehmen wir, daß die Ränder von $\tilde{X}_\nu$ gleich der Vereinigung aller Ränder der überdeckenden U_i^γ sind, sofern sie nicht in einem Durchschnitt $U_i^\gamma \cap U_i^{\gamma'}$, $|\gamma|, |\gamma'| \leq \nu, 0 \leq i,i' \leq n$ auftreten. Die Ränder, die nicht auftreten, entsprechen nach der Konstruktion der universellen Überlagerung genau den Anbindungskanten von $\tilde{B}_\nu$; es sind die Verheftungskomponenten von $\tilde{X}_\nu$ und jedem $\gamma(\tilde{X}_o)$ mit $|\gamma| = \nu + 1$, also $2q(2q-1)^\nu$ Komponenten.

Wir wollen die Ausschöpfungsfolge noch näher untersuchen. Seien

$$\tilde{X}_o \subset \ldots \subset \tilde{X}_\nu \subset \tilde{X}_{\nu+1} \subset \ldots \subset \tilde{X}_m \subset \mathbb{P}_k^1(y_m)$$

die m + 1 ersten Ausschöpfungsmengen.

Wir können davon ausgehen, daß $0 \in \tilde{X}_o$ und $\infty \notin \tilde{X}_m$ in $\mathbb{P}^1_k(y_m)$ ist, da wir sonst von y_m zu einem gebrochen linearen Ausdruck in y_m übergehen können. Ebenso können wir annehmen, daß

$$K^o_o := \{y_m \in \mathbb{P}^1_k(y_m) \,|\, |y_m| \leq 1\}$$

eine definierende Kreisscheibe von $\tilde{X}_o$ ist. Jedes $\tilde{X}_\nu$ läßt sich als endlicher Durchschnitt affinoider Kreisscheiben in $\mathbb{P}^1_k(y_m)$ darstellen:

$$0 \leq \nu \leq m,\ \tilde{X}_\nu = \bigcap_{j=o}^{\tilde{s}_\nu} K^\nu_j,\ \tilde{s}_\nu = 2q(2q-1)^\nu - 1.$$

Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

(1) Zu jeder Kreisscheibe K^ν_j gibt es genau $2q - 1$ Kreisscheiben $K^{\nu+1}_{j_1}, \ldots, K^{\nu+1}_{j_{2q-1}}$, die K^ν_j echt umfassen.

Sei $\partial K^\nu_j := \partial_j \tilde{X}_\nu$. Es gibt in Γ_q genau ein reduziertes γ der Länge $\nu + 1$, so daß $\gamma(\tilde{X}_o) \cap \tilde{X}_\nu = \partial K^\nu_j$ ist. Wir schreiben deshalb statt K^ν_j auch K^ν_γ. Da die Scheibe $\gamma(\tilde{X}_o)$ als Translat der Scheibe $\tilde{X}_o$ unter der Deckformation γ den Rang $2q$ hat, folgt (1) mit Lemma 2.4 und der Darstellung $\tilde{X}_{\nu+1} = \tilde{X}_\nu \cup \bigcup_{|\gamma|=\nu+1} \gamma(\tilde{X}_o)$.

Wir erhalten:

(2) Ist $\gamma = \gamma_{j_m}^{\sigma_m} \cdot \ldots \cdot \gamma_{j_o}^{\sigma_o}$ reduziert von der Länge $m + 1$, so ist

$$K^o_{\gamma^{\sigma_o}_{j_o}} \subsetneq K^1_{\gamma^{\sigma_o}_{j_o}\gamma^{\sigma_1}_{j_1}} \subsetneq \cdots \subsetneq K^m_{\gamma^{\sigma_o}_{j_o}\cdots\gamma^{\sigma_m}_{j_m}}$$

eine Sequenz von Kreisscheiben der Länge $m + 1$. Umgekehrt gibt es zu jeder Sequenz

$$K^o_{1_o} \subsetneq \cdots \subsetneq K^\nu_{1_\nu} \subsetneq \cdots \subsetneq K^m_{1_m},\ \nu = 0, \ldots, m$$

genau ein reduziertes γ, der Länge $m + 1$, so daß die Sequenz in die oben aufgeführte übergeht.

$\tilde{X}_o$ können wir somit als $\tilde{X}_o = \bigcap_{i=1}^{q} K^o_{\gamma_i} \cap \bigcap_{i=1}^{q} K^o_{\gamma_i}{}^{-1}$ darstellen.

Das Radienverhältnis von $K^o_{\gamma_i^\sigma}$ zu $K^o_{\gamma_{i'}^{\sigma'}}$ bezeichnen wir mit $r_{\gamma_i^\sigma, \gamma_{i'}^{\sigma'}}$. Da X_o eine gelochte Scheibe ist, ist das Radienverhältnis für $\gamma_i^\sigma \neq \gamma_{i'}^{\sigma'}$ stets kleiner 1.

Enthält jeder der in (2) angegebenen Kreisscheiben den Punkt $'\infty' \in \mathbb{P}^1_k(y_m)$, so können wir von

$$K_{1_\nu}^\nu = \{y_m \in \mathbb{P}^1_k(y_m) \mid \left|\frac{\delta_\nu}{y_m - a}\right| \leq 1\}$$

ausgehen mit einem geeigneten $a \in k$. Ist jede Kreischeibe beschränkt und stets der O-Punkt von $\mathbb{P}^1_k(y_m)$ enthalten, so ist

$$K_{1_\nu}^\nu = \{y_m \in \mathbb{P}^1_k(y_m) \mid |\delta_\nu \cdot y_m| \leq 1\}.$$

In beiden Fällen ist

$$(3) \quad |\delta_m| = \prod_{\nu=o}^{m-1} r_{\gamma_{j_\nu}^{-\sigma_\nu}, \gamma_{j_{\nu+1}}^{\sigma_{\nu+1}}}$$

Da γ reduziert ist, ist jedes auftretende Radienverhältnis kleiner als 1.

Wir beweisen (3) nur für die zweite Darstellung der $K_{1_\nu}^\nu$, da im ersten Fall analog geschlossen werden kann. Sei $K_{1_\nu}^\nu \subset K_{1_{\nu+1}}^{\nu+1}$ für $\nu + 1 \leq m$.

Nach (2) haben wir eine Darstellung

$$K_{1_\nu}^\nu = K^\nu_{\gamma_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \cdot \gamma'} \subset K_{1_{\nu+1}}^{\nu+1} = K^{\nu+1}_{\gamma_{j_{\nu+1}}^{\sigma_{\nu+1}} \cdot \gamma_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \cdot \gamma'}$$

Wir können annehmen, daß y_m so gewählt ist, daß $\{y_m \mid |\delta_\nu y_m| = 1\}$ eine Randkomponente ϑ von $\gamma'(\tilde{X}_o)$ ist, so daß

nach dem Verheftungsverfahren aus der Konstruktion von $\tilde{X}$

$$\vartheta = \gamma'(\tilde{X}_o) \cap \gamma_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \cdot \gamma'(\tilde{X}_o) \quad \text{folgt}$$

und damit nach 2.4, daß

$$(K_{1_\nu}^{\nu})^{-1} = \{y_m \mid \left|\frac{1}{\delta_\nu \cdot y_m}\right| \leq 1\}$$

eine definierende Kreisscheibe von $\gamma_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \cdot \gamma'(\tilde{X}_o)$ ebenso wie $K_{\gamma_{j_{\nu+1}}}^{\sigma_{\nu+1}} \cdot \gamma_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \cdot \gamma'$ ist. Das Radienverhältnis dieser Kreisscheiben ist natürlich ein Radienverhältnis von $\tilde{X}_o$ und zwar

$r := r_{\gamma_{j_\nu}^{-\sigma_\nu}, \gamma_{j_{\nu+1}}^{\sigma_{\nu+1}}}$, wie man leicht aus der Aktion von Γ_q ersieht.

Damit ist

$$(K_{1_\nu}^{\nu})^{-1} = \{y_m \mid \left|\frac{r}{\delta_{\nu+1} \cdot y_m}\right| \leq 1\}.$$

Aus beiden Darstellungen von $(K_{1_\nu}^{\nu})^{-1}$ folgt $|\delta_{\nu+1}| = |\delta_\nu| \cdot r$.

Mit vollständiger Induktion erhalten wir schließlich (3).

§7. Einbettung in den $\mathbb{P}^1_k$

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus §6. Sei $\varepsilon \in k$,

$|\varepsilon| = r_{\gamma_1}^{-1}, \gamma_1 < 1$.

Sei weiter

$$K^0{}_{\gamma_1} \subset K^1{}_{\gamma_1^2} \subset \ldots \subset K^m{}_{\gamma_1^{m+1}}$$

die Kreissequenz in $\mathbb{P}^1_k(y_m)$, die dem reduzierten Wort γ^{m+1} entspricht. Aufgrund (3) in §6 können wir für jedes $m \geq 0$ y_m so wählen, daß

$$K^\nu{}_{\gamma_1^{\nu+1}} = \{y_m \in \mathbb{P}^1_k(y_m) \mid |y_m| \leq |\tfrac{1}{\varepsilon}|^\nu\}$$

für $0 \leq \nu \leq m$ ist. Sei weiter

$$A(\tilde{X}_m) = k\langle \varepsilon^m y_m, \quad \frac{\delta_{m1}}{y_m - a_{m1}}, \ldots, \frac{\delta_{m\tilde{s}_m}}{y_m - a_{m\tilde{s}_m}} \rangle .$$

Das Radienverhältnis von

$K(\varepsilon^m y_m)$ zu $K(\frac{\delta_{mi}}{y_m - a_{mi}})$ in $\tilde{X}_m$ ist gerade $|\varepsilon^m \cdot \delta_m|$.

Sei $\theta \in \mathbb{R}_+$, so daß für $1 \leq i, i' \leq q$ und $\sigma, \sigma' \in \{+1, -1\}$ gilt:

$$0 < \theta := \max_{\gamma_i^\sigma \neq \gamma_{i'}^{\sigma'}} r_{\gamma_i^\sigma, \gamma_{i'}^{\sigma'}} < 1.$$

Lemma 7.1: Sei $\frac{\delta_m}{y_m - a}$ eine Koordinate auf $\tilde{X}_m \subset \mathbb{P}^1_k(y_m)$, so gelten folgende Abschätzungen für δ_m:

(1) $|a| < 1 \quad \Rightarrow |\delta_m| \leq \theta^{m+1}$

(2) $|\varepsilon|^{l-1} < |a| < |\varepsilon|^{-1}$, $1 \leq l \leq m$,

$\Rightarrow |\delta_m| \leq \theta^{m-l} \cdot |\varepsilon|^{-l}$

Beweis: (1) folgt sofort aus (1), (2), (3) in §6. Sei $|a| > 1$.

Es gibt $m - 1 + 1$ ineinanderliegende Kreisscheiben

$$K^1_{j_1}\left(\frac{\delta_1}{y_m - a}\right) \subset \ldots \subset K^m_{j_m}\left(\frac{\delta_m}{y_m - a}\right),$$

die gemeinsam den Punkt $\infty \in \mathbb{P}^1_k(y_m)$ enthalten. Das Radienverhältnis von $K^1_{j_1}$ zu $K^1(\varepsilon^1 y_m)$ ist $|\varepsilon^1 \cdot \delta_1| \leq 1$ in $\tilde{X}_1$.

Wir erhalten aus §6 für die Kreissequenz

$$|\delta_m| \leq \theta^{m-1} \cdot |\delta_1|$$

und somit $|\delta_m| \leq \theta^{m-1} \cdot |\varepsilon|^{-1}$.

Wir formulieren jetzt das Ziel dieses Paragraphen:

Satz III.2: Zu $\tilde{X}$ gibt es eine analytische Funktion

$$x : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1_k(x),$$

die $\tilde{X}$ als analytischen Teilbereich in den $\mathbb{P}^1_k(x)$ einbettet.

Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten. Sei $\|\ \|_\nu$ die Norm auf $\tilde{X}_\nu$. Eine Funktion f auf X nennen wir analytisch, falls $f|\tilde{X}_\nu \in A(\tilde{X}_\nu)$ ist für alle $\nu \geq 0$. Um eine globale Funktion x zu erhalten, definieren wir eine Folge affinoider Koordinatenfunktionen $\{x_m\}_{m \geq 0}$, $x_m \in A(\tilde{X}_m)$, so daß

$$\|x_m|\tilde{X}_\nu - x_{m+1}|\tilde{X}_\nu\|_\nu < \theta^m \cdot C(\nu)$$

für alle $m \geq \nu$ ist mit einer Konstanten $C(\nu) \in \mathbb{R}_+$, die nur von ν abhängt. Dann bildet die Folge $\{x_m\}_{m \geq \nu}$ wegen der ultrametrischen Norm eine Cauchyfolge auf jedem $\tilde{X}_\nu$ und konvergiert aufgrund der Vollständigkeit der affinoden Algebren gegen eine Grenzfunktion $x^{(\nu)}$ in $A(\tilde{X}_\nu)$. Da dann $x^{(\nu)}|\tilde{X}_{\nu-1} = x^{(\nu-1)}$ für alle $\nu \geq 1$ gilt, definiert uns diese Folge eine globale analytische Funktion x auf $\tilde{X}$ mit $x|\tilde{X}_\nu = x^{(\nu)}$.

Wir definieren induktiv die Folge $\{x_m\}_{m\geq 0}$:

$$x_0 := y_0$$

Sei x_m für $m \geq 0$ definiert. x_m habe folgende Eigenschaft:

(*) $\varepsilon^\nu x_m$ ist eine Koordinate auf $\tilde{X}_\nu$ für alle $0 \leq \nu \leq m$ und $\overline{\varepsilon^\nu \cdot x_m} = \alpha_{\nu m}\overline{\varepsilon^\nu \cdot y_m} + \zeta_{\nu m}$ in der Reduktion $\bar{A}(\tilde{X}_\nu)$ mit $\alpha_{\nu m}, \zeta_{\nu m} \in \bar{k}$, $\alpha_{\nu m} \neq 0$.

x_0 besitzt offenbar diese Eigenschaft.

Nach der Wahl der Koordinaten y_m am Anfang dieses Paragraphen erhalten wir für $\varepsilon^m y_{m+1}$ in $A(\tilde{X}_m)$ nach Satz I.1:

$$(\text{¤})\quad \varepsilon^m y_{m+1} = C_m + B_m \varepsilon^m x_m + \eta_{m0}(\varepsilon^m x_m) + \sum_{i=1}^{\tilde{s}_m} \eta_{mi}\left(\frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}}\right)$$

mit $|C_m| \leq 1$, $|B_m| = 1$

$$\|\eta_{m0}(\varepsilon^m x_m)\|_m < 1,\ \|\eta_{mi}\left(\frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}}\right)\|_m < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}|.$$

Wir können annehmen, daß η_{m0} frühestens quadratisch beginnt.

Ist $|\varepsilon|^{1-l} < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-l}$, $1 \leq l \leq m$,
so können wir für $|x_m| < |a_{mi}|$ in $\mathbb{P}^1_k(x_m)$ $\dfrac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}}$ in eine geometrische Reihe entwickeln.

$$\frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}} = -\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_{mi}^{-1}\right)^j x_m^j .$$

Deshalb erhalten wir für $|x_m| < |a_{mi}|$ für $\eta_{mi}|\tilde{X}_{l-1}$ eine Darstellung in $A(\tilde{X}_{l-1})$

$$\eta_{mi}\left(\frac{\delta_{mi}}{x_{mi} - a_{mi}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_{ji(m)} x_m^j .$$

Die Koeffizienten besitzen folgende Abschätzungen:

Lemma 7.2: Für $1 \leq l \leq m$, $|\varepsilon^{l-1}| < |a_{mi}| < |\varepsilon^{-l}|$ gilt:

(1) $|\xi_{oi(m)}| < (|\varepsilon| \cdot \theta)^{m-1}$

(2) $|\xi_{1i(m)}| < |\varepsilon|^{m-1} \cdot \theta^{m-1}$

und für $j \geq 2$

(3) $|\xi_{ji(m)}| < |\varepsilon|^{m+l(j-1)-j} \cdot \theta^{m-1}$.

Beweis: Da $\left\| \frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}} \right\|_\nu < 1$ ist für $\nu < m$, ist $|\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}}| < 1$.

Somit erhalten wir aus

$$|\xi_{oi(m)}| < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}||\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}}|$$

$$|\xi_{oi(m)}| < |\varepsilon^m| \cdot |\delta_{mi}|.$$

Lemma 7.1 (2) liefert die Behauptung.

Sei $j \geq 1$. Es ist

$$|\xi_{ji(m)}| < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}| \cdot |\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}^{j+1}}| < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}||a_{mi}^{-j}|.$$

Lemma 7.1 (2) und die Bedingung für $|a_{mi}|$ ergeben (2) und (3).

Nach (*) entspricht $\varepsilon^\nu x_m$ in der Reduktion $\bar{A}(\tilde{X}_\nu)$ $\overline{\varepsilon^\nu y_m}$ und damit aufgrund der Wahl der y_i auch $\overline{\varepsilon^\nu y_{m+1}}$. Multiplizieren wir die Gleichung (¤) mit $\varepsilon^{\nu-m}$, so erhalten wir die Beziehung zwischen den Koordinaten $\varepsilon^\nu y_{m+1}$ und $\varepsilon^\nu x_m$ in $A(\tilde{X}_\nu)$. Der konstante Term, der auf der rechten Seite durch Darstellung der einzelnen Funktionen in den Erzeugenden von $A(\tilde{X}_\nu)$ entsteht, ist

$$C_{m\nu} := \varepsilon^{\nu-m}(C_m - \sum_i^{(\nu,m)} \xi_{oi(m)}),$$

wobei über die i summiert wird mit $|\varepsilon|^{-\nu} < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-m}$.

Nach Satz I.1 ist $|C_{m\nu}| \leq 1$.

Wir setzen

$$D_m := 1 - \varepsilon^{-m} \cdot \sum_i^{(o,m)} \xi_{1i(m)},$$

mit solchen i, daß $1 < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-m}$ ist.

Jetzt können wir $x_{m+1} \in A(\tilde{X}_{m+1})$ definieren:

$$\varepsilon^{m+1} x_{m+1} := B_m^{-1} D_m \cdot \varepsilon^{m+1} y_{m+1} - \varepsilon B_m^{-1} D_m (C_m + \sum_i^{(o,m)} \xi_{oi(m)}).$$

Lemma 7.3: $\varepsilon^\nu x_{m+1}$ ist eine Koordinate auf $\tilde{X}_\nu$ für $\nu \leq m + 1$.

Beweis: Da $\varepsilon^\nu y_{m+1}$ eine Koordinate auf $\tilde{X}_\nu$ ist, müssen wir nach Satz I.1 nur die Richtigkeit der folgenden Abschätzungen nachprüfen:

a) $|C_m + \sum_i^{(o,m)} \xi_{oi(m)}| \leq |\varepsilon|^{m-\nu}$

und

b) $|D_m| = 1$.

(a) Aufgrund der Abschätzung für $C_{m\nu}$ bleibt nur zu zeigen, daß $\xi_{oi(m)}$ für $|a_{mi}| < |\varepsilon|^{-\nu}$ der Bedingung genügt. Aus dem Beweis zu 7.2. (1) folgt:

$$|\xi_{oi(m)}| < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}| \cdot |\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}}|.$$

Aus $|\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}}| < 1$ erhalten wir

$$|\xi_{oi(m)}| < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}| < |\varepsilon^m \cdot a_{mi}| < |\varepsilon|^{m-\nu}.$$

(b) Wir zeigen, daß $|\xi_{1i(m)}| < |\varepsilon|^m$ ist. Wir erhalten wieder

$$|\xi_{1i(m)}| < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}| \cdot |\frac{\delta_{mi}}{a_{mi}^2}| < |\varepsilon|^m.$$

Reduzieren wir die Definitionsgleichung für x_{m+1}, so folgt sofort die Bedingung (*) für m + 1.

Damit haben wir die Folge $\{x_m\}_{m \geq 0}$ definiert.

Lemma 7.4: Für alle ν und $m \geq \nu \geq 0$ ist $\lim_{m\to\infty} \|x_{m+1} - x_m\|_\nu = 0$.

Beweis: Aus der Definitionsgleichung für x_{m+1} und der Gleichung (¤) folgern wir:

$$\varepsilon^m \cdot x_{m+1} - \varepsilon^m \cdot x_m = B_m^{-1} D_m \Big(- \sum_i^{(o,m)} \xi_{oi(m)} + \eta_{mo} + \sum_{i=1}^{\tilde{s}_m} \eta_{mi}\Big) + (D_m - 1)\varepsilon^m x_m$$

und

$$(\varepsilon^m x_{m+1} - \varepsilon^m x_m)|\tilde{X}_\nu = - B_m^{-1} D_m \sum_i^{(o,\nu)} \xi_{oi(m)} +$$

$$- \sum_i^{(o,\nu)} \xi_{1i(m)} \cdot x_m + B_m^{-1} D_m \Big(\eta_{mo} + \sum_{|a_{mi}|<1} \eta_{mi} + \sum_i^{(o,\nu)} \eta_{mi} + \sum_i^{(\nu,m)} \sum_{j=2}^{\infty} \xi_{ji(m)} x_m^j,$$

da $\sum_i^{(\nu,m)} \eta_{mi} \Big(\frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}}\Big) = \sum_i^{(\nu,m)} \sum_{j=o}^{\infty} \xi_{ji(m)} x_m^j$ ist. So erhalten wir

$$\|x_{m+1} - x_m\|_\nu \leq$$

$$|\varepsilon|^{-m} \cdot \max \Big\{ \max_i^{(o,\nu)} |\xi_{oi(m)}|, \max_i^{(o,\nu)} \|\xi_{1i(m)} \cdot x_m\|_\nu, \|\eta_{mo}\|_\nu,$$

$$\max_{|a_{mi}|<1} \|\eta_{mi}\|_\nu, \max_i^{(o,\nu)} \|\eta_{mi}\|_\nu, \max_i^{(\nu,m)} \max_{j=2}^{\infty} \|\xi_{ji(m)} x_m^j\|_\nu \Big\}.$$

Wir schätzen die Terme einzeln ab.

(a) Für $1 < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-\nu}$ ist

$|\xi_{oi(m)} \cdot \varepsilon^{-m}| < (\theta \cdot |\varepsilon|)^{m-\nu} \cdot |\varepsilon|^{-m}$ nach Lemma 7.2 (1), also

$< \theta^m \cdot C(\nu)$ mit einer Konstanten $C(\nu) \in \mathbb{R}_+$,

die nur von ν und nicht von m abhängt.

(b) Da $\|x_m\|_\nu = |\varepsilon|^{-\nu}$ ist, erhalten wir wieder mit Lemma 7.2.(2) für $1 < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-\nu}$:

$$\|\xi_{1i(m)} \cdot x_m \cdot \varepsilon^{-m}\|_\nu = |\xi_{1i(m)} \cdot \varepsilon^{-m-\nu}| < \theta^{m-\nu} \cdot |\varepsilon|^{-\nu-1} < \theta^m \cdot C(\nu).$$

(c) $\| \eta_{m0}(\varepsilon^m \cdot x_m) \cdot \varepsilon^{-m} \|_\nu < |\varepsilon|^{2(m-\nu)-m} < \theta^m \cdot C(\nu)$,

da wir vorausgesetzt haben, daß η_{m0} als Potenzreihe in $\varepsilon^m \cdot x_m$ frühestens quadratisch beginnt.

(d) Sei $|a_{mi}| < 1$, so ist nach Lemma 7.1 (1), da $\| \|_\nu \leq \| \|_m$ gilt:

$$\| \eta_{mi}\left(\frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}}\right) \cdot \varepsilon^{-m} \|_\nu < |\varepsilon^m \delta_{mi}| \cdot |\varepsilon|^{-m} < \theta^m.$$

(e) Sei $1 < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-\nu}$, so erhalten wir analog zu (d) aus 7.1 (2)

$$\| \eta_{mi}\left(\frac{\delta_{mi}}{x_m - a_{mi}}\right) \cdot \varepsilon^{-m} \|_\nu < |\varepsilon^m \cdot \delta_{mi}| \cdot |\varepsilon|^{-m} \leq \theta^m \cdot (\theta \cdot |\varepsilon|)^{-\nu}.$$

(f) Sei $|\varepsilon|^{-\nu} \leq |\varepsilon|^{1-1} < |a_{mi}| < |\varepsilon|^{-1} \leq |\varepsilon|^{-m}$, so ist nach 7.1 (3)

$$\| \xi_{ji(m)} x_m^j \cdot \varepsilon^{-m} \|_\nu = \| \xi_{ji} \cdot \varepsilon^{-m-\nu} \|_\nu < \theta^{m-1} \cdot |\varepsilon|^{1(j-1)-j(1+\nu)}.$$

Da $\lim_{j\to\infty} \| \xi_{ji(m)} \cdot x_m^j \|_\nu = 0$ ist, können wir einen Index $\underline{j}(i) \geq 2$ so wählen, daß $\| \xi_{\underline{j}i(m)} x_m^{\underline{j}} \|_\nu = \max_{j=2}^{\infty} \| \xi_{ji(m)} x_m^j \|_\nu$ ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $2(1 + \nu) \leq 1 \leq m$,

so haben wir $1(\underline{j} - 1) - \underline{j}(1 + \nu) \geq 2(\underline{j} - 1)(\nu + 1) - \underline{j}(\nu + 1)$

$$\geq (\underline{j} - 2)(1 + \nu) \geq 0$$

und damit

$$\| \xi_{ji(m)} x_m^j \cdot \varepsilon^{-m} \|_\nu < \theta^{m+(\underline{j}-2)1-\underline{j}(1+\nu)} < \theta^m \cdot C(i,\nu).$$

(2) $\nu + 1 \leq 1 < 2(1 + \nu)$, so ist

$$\| \xi_{ji(m)} x_m^j \cdot \varepsilon^{-m} \|_\nu < \theta^{m-2(1-\nu)} \cdot |\varepsilon|^{-(\nu+1)} \leq \theta^m \cdot C(\nu).$$

$\{x_m\}_{m\geq\nu}$ konvergiert damit auf jedem $\tilde{X}_\nu$. Sei $x^{(\nu)}$ die Grenzfunktion auf $\tilde{X}_\nu$. Aus der Konstruktion folgt sofort $x^{(\nu)} | \tilde{X}_{\nu-1} = x^{(\nu-1)}$ für alle $\nu \geq 1$. Sei x die zur Folge $x^{(\nu)}$, $\nu \geq 0$, gehörende globale Funktion auf $\tilde{X}$.

Lemma 7.5: $\varepsilon^\nu x$ ist eine Koordinate auf $\tilde{X}_\nu$ für alle $\nu \geq 0$.

Beweis: Die Folge $\{\varepsilon^\nu \cdot x_m\}_{m \geq \nu}$ konvergiert auf $\tilde{X}_\nu$ gegen die Funktion $\varepsilon^\nu x$. Das bedeutet, daß für jedes $\mu > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\| \varepsilon^\nu x - \varepsilon^\nu x_m \|_\nu < \mu \quad \text{für } m \geq n$$

ist. Stellen wir die Funktion $\varepsilon^\nu x - \varepsilon^\nu x_m$ in den Erzeugenden von $A(\tilde{X}_m)$ dar, so ist deren Norm gleich dem Maximum der Normen der einzelnen Potenzreihen in den Erzeugenden. Damit sind für diese Reihen für kleines μ (kleiner als alle in $\tilde{X}_m$ vorkommenden Radienverhältnisse) die Bedingungen von Satz I.1 erfüllt. $\varepsilon^\nu x$ ist eine Koordinate auf $\tilde{X}_\nu$.

Lemma 7.5 schließt den Beweis zu Satz III.2 ab. Jedes $\tilde{X}_\nu$ für $\nu \geq 0$ ist eine gelochte Scheibe im $\mathbb{P}_k^1(x)$. x vermittelt eine Einbettung

$$\tilde{X} \to \mathbb{P}_k^1(x)$$

als analytischer Teilbereich in den $\mathbb{P}_k^1(x)$.

Korollar III.2.1: $\tilde{X} \subset \mathbb{P}_k^1(x)$ ist ein unbeschränktes Steinsches Gebiet des $\mathbb{P}_k^1(x)$.

Beweis: Nach [7], §2, 1. ii) müssen wir nur noch folgendes zeigen:

Ist (D_m) eine Folge von nicht leeren Kreisen von $\mathbb{P}_k^1$ mit $D_m \cap \tilde{X}_m = \emptyset$ und $D_{m+1} \subset D_m$, so ist $\bigcap_{M=0}^{\infty} D_m$ einpunktig.

Da jedes $\tilde{X}_m$ eine gelochte Scheibe in $\mathbb{P}_k^1(x)$ ist, haben wir statt der endlichen Kreissequenzen in §6 jetzt Kreisfolgen

$$K_{j_0}^0 \subset \ldots \subset K_{j_m}^m \subset \ldots \qquad , m \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zuerst, daß

$$K^{(j)} := \bigcup_{m=o}^{\infty} K^m_{j_m} = \mathbb{P}^1_k - \{L^{(j)}\}$$

ist für ein $L^{(j)} \in \mathbb{P}^1_k$, wobei $(j) := j_o, j_1, \ldots$ die Indexfolge darstellt. Da diese Eigenschaft invariant unter $PGL_2(k)$ ist, können wir davon ausgehen, daß jede Kreisscheibe den O-Punkt in $\mathbb{P}^1_k$ enthält. Somit läßt sich jede Kreisscheibe $K^m_{j_m}$ schreiben als

$$K^m_{j_m} = \{x \in \mathbb{P}^1_k \mid |\delta_m x| < 1\}.$$

Aus (3) in §6 folgt aber dann, daß $|\delta_m| \leq \theta^m$ ist für alle m und somit

$$K^{(j)} = \mathbb{P}^1_k - \{\infty\}.$$

Kehren wir zur Folge $\{D_m\}_m$ zurück. Sei ${}^cK^m_{j_m} := \mathbb{P}^1_k - K^m_{j_m}$.
Zu jedem D_m gibt es offenbar ein ${}^cK^m_{j_m} \supset D_m$.
Die so gewonnenen Kreisscheiben $K^m_{j_m}$ bilden eine Kreisfolge.
Wir können annehmen, daß $\infty \notin {}^cK^m_{j_m}$ für alle m ist. Es folgt

$$\bigcap_{m=o}^{\infty} D_m \subset \bigcap_{m=o}^{\infty} {}^cK^m_{j_m} = \{L^{(j)}\}.$$

Sei $P_m \in D_m$, so ist $|P_m - P_{m+1}| \leq \theta^m$, also

$$\lim_{m\to\infty} P_m = L^{(j)}.$$

Nehmen wir an, $L^{(j)}$ sei für $m \geq m_o$ nicht in D_m enthalten.
Sei o.B.d.A. $D_{m_o} = \{x \mid |x - a| < \mu_o\}$, so ist $|L^{(j)} - a| \geq \mu_o$ und, da jeder Punkt aus D_{m_o} Mittelpunkt ist, $|L^{(j)}, D_{m_o}| \geq \mu_o > 0$.
Da aber für $m \geq m_o$ $|L^{(j)}, D_m| \geq |L^{(j)}, D_{m_o}| \geq \mu_o$ ist, widerspricht das der Konvergenz der $P_m \in D_m$ gegen $L^{(j)}$. Somit ist der Durchschnitt aller D_m einpunktig und ungleich der leeren Menge.

§8. Mumford-Kurven

In diesem Paragraphen schließen wir den Beweis des Hauptsatzes ab. Wir zeigen, daß die Fundamentalgruppe von X, die auf $\tilde{X}$ als Decktransformationsgruppe operiert, als Schottky-Gruppe von $PGL_2(k)$, den Automorphismen von $\mathbb{P}^1_k$, aufgefaßt werden kann. Wir erläutern erst die einzelnen Begriffe.

Ist G eine Untergruppe von $PGL_2(k)$, so operiert G in natürlicher Weise als Gruppe gebrochen linearer Transformationen auf $\mathbb{P}^1_k$. Ein Punkt $P \in \mathbb{P}^1_k$ heißt Limitpunkt von G, falls es eine Folge $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in G gibt mit $g_i \neq g_{i'}$ für $i \neq i'$ und einen Punkt $P' \in \mathbb{P}^1_k$, so daß

$$\lim_{i \to \infty} g_i(P') = P$$

ist. P heißt gewöhnlicher Punkt von G, falls P kein Limitpunkt ist. Den Bereich der gewöhnlichen Punkte von G bezeichnen wir mit Ω. G heißt diskontinuierlich, falls $\Omega \neq \emptyset$ ist. Aus [15], Kap. I bzw. [9], I, §1 entnehmen wir die Definition einer Schottky-Gruppe.

Definition: $G \subset PGL_2(k)$ heißt Schottky-Gruppe, falls

(1) G eine freie Gruppe vom Rang $g < \infty$,

(2) G diskontinuierlich,

(3) für jedes $P \in \mathbb{P}^1_k$ $\overline{G \cdot P}$, der topologische Abschluß der Bahn von P unter G, in der metrischen Topologie kompakt ist.

Der Quotientenraum Ω/G trägt in natürlicher Weise die Struktur eines k-analytischen Raumes, siehe [6], Satz 2. Nach [6], Satz 3 ist $\Omega/G = C$ eine nichtsinguläre projektiv-algebraische Kurve vom Geschlecht g.

Definition: Eine nichtsinguläre projektiv-algebraische Kurve C über k heißt Mumford-Kurve, falls sie durch eine Schottky-Gruppe G uniformiert wird, das heißt als

$$C \simeq \Omega_{C/G_C}$$

dargestellt werden kann.

Wir haben $\tilde{X}$ als unbeschränktes Steinsches Gebiet in den $\mathbb{P}^1_k(x)$ eingebettet. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = \Gamma_q$ operiert als Decktransformationsgruppe auf $\tilde{X}$. Jedes $\gamma \in \Gamma_q$ ist also ein Automorphismus des unbeschränkten Steinschen Gebietes $\tilde{X}$. Nach [7], Satz 5 und Korollar 2 kann jeder Automorphismus von $\tilde{X}$ zu einem Automorphismus von $\mathbb{P}^1_k(x)$ fortgesetzt werden. Wir bezeichnen die Fortsetzung von $\gamma \in \Gamma_q$ ebenfalls mit $\gamma \in PGL_2(k) : \gamma(\tilde{X}) = \tilde{X}$. Damit können wir Γ_q als Untergruppe von $PGL_2(k)$ auffassen, da die Gruppenstrukturen jeweils der Hintereinanderschaltung von Abbildungen entsprechen.

Satz III.3: $\Gamma_q \subset PGL_2(k)$ ist eine Schottky-Gruppe und $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^1_k(x)$ der Bereich der gewöhnlichen Punkte von Γ_q.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß Γ_q eine Schottky-Gruppe ist. Die Bedingung (1) ist erfüllt, da Γ_q frei vom Rang $q(X) < \infty$ ist.

Wir zeigen als nächstes die Bedingung (2), indem wir nachweisen, daß jedes $P \in \tilde{X}$ ein gewöhnlicher Punkt von Γ_q ist.

Sei $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Γ_q mit $\gamma_i \neq \gamma_{i'}$ für $i \neq i'$ und $P' \in \mathbb{P}^1_k$, so daß $\lim_{i \to \infty} \gamma_i(P') = P$ ist. Wir sehen sofort aus

$$\gamma_i(\mathbb{P}^1_k - \tilde{X}) = \mathbb{P}^1_k - \tilde{X} ,$$

daß P' aus $\tilde{X}$ sein muß. Sei $P' \in U_1^{\gamma'}$ und $P \in U_r^{\gamma}$.

Da $U_1 \cap U_r$ höchstens endlich viele Komponenten hat, gibt es auch höchstens endlich viele $U_1^{\gamma_1'}, \ldots, U_1^{\gamma_t'}$ mit $U_1^{\gamma_j'} \cap U_r^{\gamma} \neq \emptyset$ und somit nur endlich viele γ_i mit $\gamma_i \cdot \gamma' = \gamma_j'$, $1 \leq j \leq t$, so daß $\gamma_i(P')$ in der Umgebung U_r^{γ} von P liegen kann.
Wir zeigen anschließend, daß jedes $P \in \Lambda := \mathbb{P}_k^1 - \tilde{X}$ ein Limitpunkt von Γ_q ist. Da insbesondere $P \notin \tilde{X}_m$ ist für jedes m, finden wir eine Kreisfolge

$$K_j^o \subset \ldots \subset K_{j_m}^m \subset \ldots \quad , m \in \mathbb{N},$$

so daß $P \notin K_{j_m}^m$ ist. Aufgrund des Beweises III.2.1 ist

$$\bigcap_{m=o}^{\infty} {}^{c}K_{j_m}^m = \{P\}.$$

Jeder Kreisfolge entspricht eine Folge $\{\gamma_{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$\gamma_{(m)} := \gamma_{j_m}^{\sigma_m} \cdot \ldots \cdot \gamma_{j_o}^{\sigma_o}, \quad \gamma_{j_m}^{-\sigma_m} \neq \gamma_{j_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \quad \text{für } m \geq 0,$$

wie wir am Ende von §6 gesehen haben. Da $\gamma_{(m)}(\tilde{X}_o)$ nach der dortigen Bezeichnung mit dem j_m-ten Rand von $\tilde{X}_m$, einem Rand von $K_{\gamma_{(m)}}^m = K_{j_m}^m$, verheftet ist, liegt $\gamma_{(m)}(\tilde{X}_o)$ bestimmt in ${}^{c}K_{\gamma_{(m-1)}}^{m-1}$. Also gilt

$$\lim_{m \to \infty} \gamma_{(m)}(P') = P$$

für jedes $P' \in \tilde{X}_o$.

Wir haben also eine eineindeutige Beziehung zwischen den Limitpunkten von Γ_q und den Folgen $\{\gamma_{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Dies entspricht genau dem, was bereits 1886 F. Schottky in [23], §3 ausgeführt hat. $\tilde{X}_o$ ist ein Fundamentalbereich von Γ_q.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß $\overline{\Gamma_q \cdot P}$ für jedes P kompakt ist. Dies ist offenbar der Fall, wenn Λ kompakt ist. Ist $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Λ, so zeigen wir, daß eine konvergente Teilfolge existert. Jedem L_i entspricht genau eine Folge von Kreisscheiben $\{K^m_{j_{mi}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$\bigcap_m {}^c K^m_{j_{mi}} = \{L_i\}$$

Mit dem Cantorschen Diagonalverfahren können wir eine Diagonalfolge von Kreisscheiben $\{K^m_{j_{mi_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ konstruieren.

$$\begin{array}{ccccccc}
K^o_{j_{oi_o}} & = & K^o_{j_{oi_1}} & = & K^o_{j_{oi_2}} & = & K^o_{j_{oi_3}} = \ldots \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
K^1_{j_{1i_o}} & & K^1_{j_{1i_1}} & = & K^1_{j_{1i_2}} & = & K^1_{j_{1i_3}} = \ldots \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
K^2_{j_{2i_o}} & & K^2_{j_{2i_1}} & & K^2_{j_{2i_2}} & = & K^2_{j_{2i_3}} = \ldots \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Sei $\{L\} := \bigcap_{m=o}^{\infty} {}^c K^m_{j_{mi_m}}$, so ist $\lim_{m=o}^{\infty} L_{i_m} = L$, wie die Abschätzungen über die Radien der Kreisscheiben zeigen (Beweis zu III.2.1, bzw. (3) in §6).

Wir erhalten

Korollar III.3.1: X ist eine Mumford-Kurve vom Geschlecht $g = q(X)$, die von der Schottky-Gruppe $\Gamma_q \cong \pi_1(X)$ uniformisiert wird: $X = \tilde{X}/\Gamma_q$.

Damit ist der Hauptsatz bewiesen, da die Mumford Kurve X/Γ_q offenbar dieselbe analytische Struktur trägt wie X.

Kap. IV: ANWENDUNGEN AUF ZYKLISCHE GALOIS ERWEITERUNGEN VON k(x)

In diesem Kapitel geben wir für eine Klasse nichtsingulärer projektiv algebraischer Kurven ein hinreichendes geometrisches Kriterium, wann sie Mumford-Kurven sind.

Aus [21] entnehmen wir ein Ergebnis von J. Tate, daß eine elliptische Kurve ($g = 1$) genau dann eine Mumford-Kurve ist, wenn der Betrag der zugehörigen j-Invarianten größer als 1 ist.

Das hat folgende Konsequenz:
Jeder elliptische Funktionenkörper läßt sich als zyklische Galois Erweiterung eines rationalen Funktionskörpers vom Grad zwei mit dem Minimalpolynom

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$$

darstellen. Die Funktion x bewirkt eine zweiblättrige verzweigte Überlagerung der Kurve über dem $\mathbb{P}^1_k(x)$, wobei die Punkte über $0, 1, \lambda$ und '∞' gerade die Verzweigungspunkte sind. Durch einen Automorphismus des $\mathbb{P}^1_k$ kann immer erreicht werden, daß $|\lambda| = 1$ ist. Wir entnehmen aus [14], IV.4 die Berechnung der Invarianten $j(\lambda)$ - die Restklassencharakteristik von k sei nicht 2.
Nun gilt $|j| \leq 1$ genau dann, wenn $0, 1, \lambda$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, also $|j| > 1$ genau dann, wenn $|1 - \lambda| < 1$ ist.
Normieren wir nicht die kritischen Punkte, die Bilder der Verzweigungspunkte, so besitzt der $\mathbb{P}^1_k(x)$ bei einer elliptischen Mumford-Kurve eine Überdeckung aus zwei Kreisscheiben, wobei in jeder Kreisscheibe genau zwei kritische Punkte liegen.
Diese Eigenschaft ist invariant unter $PGL_2(k)$. Elliptische Mumford-Kurven sind durch diese Eigenschaft charakterisiert.

Wir wollen dieses Kriterium für elliptische Kurven verallgemeinern. Entsprechende Aussagen für hyperelliptische Kurven wurden inzwischen in [3], Satz 6.2 und [9], V, §3 gemacht.

Wir konkretisieren die Kurve C als verzweigte Überlagerung des $\mathbb{P}^1_k$. Die geometrische Konfiguration der kritischen Punkte in $\mathbb{P}^1_k$ ist dann zu untersuchen.
Aufgrund des Hauptsatzes müssen wir nur nachweisen, daß eine bestimmte Konfiguration der kritischen Punkte bewirkt, daß die nach [8], 4.3 eindeutig bestimmte analytische Struktur auf C, die eines lokal einfachen analytischen Raumes ist.

Sei k(x, y) eine zyklische Galoiserweiterung des rationalen Funktionenkörpers k(x) vom Grad n mit dem Minimalpolynom

$$y^n = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{\nu_j}, \quad 0 < \nu_j < n$$

und ggt(n, $\nu_1 \ldots, \nu_m$) =1, da sonst das Polynom nicht irreduzibel ist. Man sieht leicht, daß eine Erweiterung mit dem Minimalpolynom normal und genau dann separabel ist, wenn die Charakteristik von k 0 ist oder sonst kein Teiler von n ist. Wir setzen sogar stärker voraus, daß die Restklassencharakteristik p von k kein Teiler von n ist, um später technische Vereinfachungen zu erhalten. Das ist insofern eine stärkere Voraussetzung, als Körper mit Charakteristik 0 die Restklassencharakteristik $p \neq 0$ besitzen können.

Sei C das nichtsinguläre Modell des algebraischen Funktionenkörpers k(x, y).

Der Injektion

$$k(x) \to k(x, y)$$

entspricht eine Projektion

$$\mathbb{P}^1_k(x) \overset{\pi_x}{\leftarrow} C,$$

die durch die Funktion x bewirkt wird. π_x ist eine verzweigte Überlagerung ([14], IV.2).

Jedem Punkt aus $\mathbb{P}^1_k(x)$ bzw. C entspricht genau ein Stellenring in k(x) bzw. k(x, y) ([4]). Wir können daher π_x folgenderweise beschreiben:
Ist O_a der Stellenring in k(x), der dem Punkt $a \in \mathbb{P}^1_k(x)$ entspricht mit dem maximalen Ideal M_a, so ist $\bar{O}_a$, der ganzalgebraische Abschluß von O_a in k(x, y), ein endlicher O_a-Modul und ein Dedekindring ([24], §4).

Wir haben in $\bar{O}_a$ also eine Zerlegung in Primidealpotenzen:

$$M_a \cdot \bar{O}_a = \prod_{i=1}^{J_a} P_i^{e_i'}$$

mit den aus Dimensionsgründen maximalen Idealen $P_i \subset \bar{O}_a$. Die Stellenringe $\bar{O}_{a(P_i)}$ entsprechen genau den J_a Punkten der Faser $\pi_x^{-1}(a)$.

Da k algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt wurde, erhalten wir aus [24], I, §4. Prop. 10.:

$$\sum_{i=1}^{J_a} e_i' = n.$$

Da die Galois-Gruppe von k(x, y) : k(x) transitiv auf den maximalen Idealen operiert, die $M_a \cdot \bar{O}_a$ teilen ([24], I, §7), erhalten wir aus Gal (k(x, y) : k(x)) = $\mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z}$,

daß $e_a := e_i' = e_j'$ für alle $i, j \in J_a$ gilt und somit auch

$$J_a \cdot e_a = n$$

ist. Aus $p \nmid n$ folgt somit auch $p \nmid e_a$ und daher nach [14], IV.2, daß π_x nur zahme Verzweigung besitzt.

Wir nennen die Punkte $P_c \in \pi_x^{-1}(c)$ regulär, falls $e_c = 1$ ist und damit $\pi^{-1}(c)$ aus n Punkten besteht. Nicht reguläre Punkte $P_a \in \pi_x^{-1}(a)$ nennen wir Verzweigungspunkte und $e_a > 1$ den Verzweigungsgrad von P_a. $a = \pi_x(P_a)$ heißt dann kritischer Punkt von π_x.

Es gibt nur endlich viele kritische Punkte von π_x. Wir nehmen an, '∞' sei kein kritischer Punkt. Das kann durch einen Automorphismus des $\mathbb{P}_k^1$ leicht erreicht werden.

Wir erhalten dann : $\sum_{j=1}^{m} \nu_j = u \cdot n$, $u \in \mathbb{N}$.

Man verifiniert leicht

Bemerkung 1: Ist $y^n = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{\nu_j}$, $0 < \nu_j < n$, $n \mid \sum_{j=1}^{m} \nu_j$,

so ist $K_x := \{a_1, \ldots, a_m\}$ die Menge der kritischen Punkte von π_x in $\mathbb{P}_k^1(x)$ und für $J_j := J_{a_j}$ und $e_j := e_{a_j}$ gilt:

$$J_j = ggt(n, \nu_j),\ e_j = n \cdot J_j^{-1}$$

und

Bemerkung 2: Die Funktion $x - c$ ist in jedem Punkt vom $\pi^{-1}(c)$, $c \in k$, mit $c \neq a_i$ eine lokale Koordinate, besitzt dort also eine einfache Nullstelle (und erzeugt damit das maximale Ideal des zugehörigen Stellenrings). $\frac{1}{x}$ ist eine lokale Koordinate für alle Punkte aus $\pi^{-1}(\infty)$.

§9. Wurzeln von Polynomen auf affinoiden Teilbereichen des $\mathbb{P}^1_k$

Sei T ein affionider Teilbereich des $\mathbb{P}^1_k$ mit der Algebra
$A(T) = k\langle x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_t}{x - b_t}\rangle$.

Ist $P(x) = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{\nu_j}$ ein Polynom in x auf T, $0 < \nu_j < n$, $n > 1$, und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, so beantworten wir hier die Frage, wann in A(T) ein W(x) existiert mit $W^n(x) = P(x)$ unter der Voraussetzung, daß die Restklassencharakteristik p von k 0 ist oder n nicht teilt.

Lemma 9.1: Sei $n > 1$. Die Restklassencharakteristik p von k sei 0 bzw. kein Teiler von n.

Dann ist für alle $\nu \geq 0$: $\left|\binom{\frac{1}{n}}{\nu}\right| \leq 1$.

Beweis: Da insbesondere die Charakteristik von k kein Teiler von n ist, ist $\binom{\frac{1}{n}}{\nu}$ erklärt. Wir erhalten:

$$\left|\binom{\frac{1}{n}}{\nu}\right| = \left|\frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot ((\nu-1)n - 1)}{n^{\nu} \cdot \nu!}\right|$$

Für p = 0 ist die Behauptung sofort ersichtlich. Sei deshalb $p \neq 0$, so folgt wegen der Voraussetzungen an p $|n| = 1$.
Für $\nu!$ ergibt sich

$$|\nu!| = |p^{[\nu p^{-1}] + [\nu p^{-2}] + \ldots + [\nu p^{-r}] + \ldots}|,$$

wobei mit $[\nu \cdot p^{-r}]$ die größte ganze Zahl bezeichnet wird, die kleiner gleich $\nu \cdot p^{-r}$ ist.

Beachten wir, daß die Zahlen $((1p^j + 1)n - 1)$, $((1p^j + 2)n - 1), \ldots, ((1 + 1)p^j n - 1)\ p^j$ verschiedene Reste modulo p^j haben für $j \geq 1$, so ist genau ein Rest gleich 0. Daraus erhalten wir

$$|(n-1) \cdot \ldots \cdot ((\nu-1)\cdot n-1)| \leq |p^{[(\nu-1)p^{-1}]} + \ldots + [(\nu-1)p^{-r}] + \ldots|$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $p \nmid \nu \Rightarrow [(\nu - 1)p^{-r}] = [\nu p^{-r}]$ für alle $r > 0$.

b) $p \mid \nu \Rightarrow |(n - 1) \cdot \ldots \cdot ((\nu - 1)n - 1)| = |(n - 1)\cdot\ldots\cdot(\nu\cdot n-1)|$, da $|\nu \cdot n - 1| = 1$ ist.

In beiden Fällen folgt sofort $\left|\binom{\frac{1}{n}}{\nu}\right| \leq 1$.

Die Voraussetzung an die Restklassencharakteristik soll im folgenden immer gelten.

Lemma 9.2: Sei $n > 1$. In $k\langle z\rangle$ gibt es genau dann ein w mit $w^n = (z - a)$, wenn $|a| > 1$ ist, also $z - a$ eine Einheit ist.

Beweis: Für $|a| \leq 1$ kann wegen der einfachen Nullstelle von $z - a$ kein w existieren. Sei $|a| > 1$. Wir setzen

$$w := (z - a)^{\frac{1}{n}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{\nu} a^{\frac{1}{n}-\nu} \cdot z^{\nu}.$$

Wegen der Voraussetzung an die Restklassencharakteristik folgt, daß w sinnvoll definiert ist und daß wegen Lemma 9.1 die Reihe strikt konvergent ist.

$a^{\frac{1}{n}-\nu}$ ist aus k für alle ν, da wir k algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt haben.

Lemma 9.3. Sei $n > 1$. In $k\langle z, \frac{1}{z}\rangle$ gibt es genau dann ein w mit $w^n = (z - a)^l$, $l \geq 1$, $|a| < 1$, falls n ein Teiler von l ist.

Beweis: Sei $w = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu$, so ist der Koeffizient c_l in w^n:

$$c_l = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=l} a_{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_{\nu_n} = 1.$$

Da w wie $z - a$ in $k\langle z, \frac{1}{z}\rangle$ eine Einheit ist und wegen der Potenzmultiplikativität der Norm die Norm 1 haben muß, gibt es nach [13], Lemma 2, genau einen Koeffizienten a_s von w mit $|a_s| = 1$ und $|a_i| < 1$ für $i \neq s$. Das bedeutet aber $a_{\nu_i} = a_s$ und damit $n \cdot s = l$.

Sei nun $P(x) = \sum_{j=1}^{m} (x - a_j)^{\nu_j}$ ein Polynom auf T, $0 < \nu_j < n$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Wir definieren:

$$L_o := \{j \mid |a_j| > 1\}$$

und für $0 < i \leq t$

$$L_i := \{j \mid |a_j - b_i| < |\varepsilon_i|\}.$$

Weiter setzen wir

$$\lambda_i := \sum_{j \in L_i} \nu_j.$$

Lemma 9.4: In $A(T)$ gibt es zu $P(x)$ genau dann ein $W(x) \in A(T)$ mit $W^n = P$, falls

(1) $\bigcup_{i=o}^{t} L_i = \{1, \ldots, m\}$;

(2) für $0 < i \leq t$: $n \mid \lambda_i$ gilt.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß die Bedingungen hinreichend sind. Ist $L_i \neq \emptyset$ für $i > 0$, was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, so wählen wir ein beliebiges

Element $j_i \in L_i$ und setzen:

$$P_i := \prod_{j_i \neq j \in L_i} \left(\frac{x - a_j}{x - a_{j_i}}\right)^{\nu_j} \cdot (x - a_{j_i})^{\lambda_i}.$$

Jedes $g_j := \frac{x - a_j}{x - a_{j_i}}$ ist eine Einheit in $k\langle \frac{\varepsilon_i}{x - b_i} \rangle$.

Aus $k\langle \frac{\varepsilon_i}{x - b_i} \rangle = k\langle \frac{\varepsilon_i}{x - a_{j_i}} \rangle$ und den Partialbruchgleichungen (*) in §1 erhalten wir

$$g_j = \frac{a_{j_i} - a_j}{\varepsilon_i} \left(\frac{\varepsilon_i}{x - a_{j_i}} + \frac{\varepsilon_i}{a_{j_i} - a_j}\right).$$

Aus der Definition von L_i folgt $|\varepsilon_i| > |a_{j_i} - a_j|$ und somit nach Lemma 9.2, daß jedes g_j in $k\langle \frac{\varepsilon_i}{x - a_{j_i}} \rangle$ und damit erst recht in A(T) eine n-te Wurzel besitzt. Setzen wir

$$P_o := \prod_{j \in L_o} (x - a_j)^{\nu_j}$$

und berücksichtigen, daß P_o nach 9.2 in A(T) eine n-te Wurzel hat, so folgt aus der Bedingung (1)

$$P = P_o \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_t = g^n \cdot \prod_{i=1}^{t} (x - a_{j_i})^{\lambda_i}$$

für ein geeignetes $g \in A(T)$. Da nach (2) $n | \lambda_i$ gilt, ist alles bewiesen.

Die angegebenen Bedingungen sind auch notwendig. Sei $W^n = P$. (1) ist sicher erfüllt. Wegen der Wahl der ν_j, $0 < \nu_j < n$, kann kein $a_j \in T$ sein. Die Bedingung (2) erhalten wir, indem wir A(T) vergrößern:

$$A(T) \subset A_i := k\langle \frac{x - b_i}{\varepsilon_i}, \frac{\varepsilon_i}{x - b_i} \rangle.$$

Die Funktionen $(x - a_{j_{i'}})$ besitzen für $i' \neq i$ in $k\langle \frac{x - b_i}{\varepsilon_i} \rangle \subset A_i$ nach Lemma 9.2. eine n-te Wurzel. Von oben erhalten wir damit für P und eine geeignete Einheit $g' \in A_i$ die Darstellung

$$W^n = P = g'^n \cdot (x - a_{j_i})^{\lambda_i} \text{ in } A_i.$$

Mit Lemma 9.3 folgt jetzt die Behauptung $n | \lambda_i$.

§10. Verteilung der kritischen Punkte

Das Ziel des Paragraphen ist es, zu einer Kurve C, die zyklisch Galois über dem $\mathbb{P}^1_k$ liegt mit einer speziellen Verteilung der kritischen Punkte eine endliche Überdeckung aus gelochten Scheiben zu konstruieren.

Ist ein Teilbereich des $\mathbb{P}^1_k(x)$ durch die Ungleichungen $|x| \leq 1, \ldots, |\varepsilon_s| \leq |x - b_s|$ gegeben, so ist $\bar{S} := \pi_x^{-1}(S)$ durch das gleiche System von Ungleichungen gegeben, wobei die Funktionen $x, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{x - b_s}$ als Funktionen auf C aufgefaßt werden.
Nach [9], III, §1, (5) ist $\bar{S}$ ein affinoider Raum, $A(S) \hookrightarrow A(\bar{S})$ und $A(\bar{S})$ ein endlicher A(S)-Modul.
Wir werden in unserem Fall konkret nachweisen, daß $\bar{S}$ die disjunkte Vereinigung von endlich viele gelochten Scheiben ist.

Die irreduzible nichtsinguläre projektiv algebraische Kurve C sei durch die Gleichung

$$y^n = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{\nu_j}$$

gegeben mit $0 < \nu_j < n$, $a_j \neq a_{j'}$ für $j \neq j'$ und $\sum_{j=1}^{m} \nu_j = u \cdot n$, $u \in \mathbb{N}$. Wir setzen folgendes voraus:

(i) Die Anzahl der kritischen Punkte ist gerade : $m = 2w$.

(ii) Die kritischen Punkte lassen sich zu Paaren zusammenfassen:
$K_x = \{a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22}; \ldots ; a_{w1}, a_{w2}\}$ mit $\nu_{j1} + \nu_{j2} = n$, also

$$y^n = P(x) := \prod_{j=1}^{w} (x - a_{j1})^{\nu_{j1}} (x - a_{j2})^{n-\nu_{j1}}.$$

(iii) Es gibt eine endliche Überdeckung des $\mathbb{P}^1_k$ durch gelochte Scheiben S_j, $j = 1, \ldots, w$ vom Rang r_j, so daß $\bar{S}_j \cap K_x = \{a_{j_1}, a_{j_2}\}$ ist für alle j.

Für m=2 ist $C \simeq \mathbb{P}^1_k$ und somit eine Mumford-Kurve.

Wir können annehmen, daß sich die gelochten Scheiben S_j - wenn überhaupt - nur in Randkomponenten schneiden. Der Überdeckungsgraph dieser Überdeckung ist ein endlicher Baum ($q(\mathbb{P}^1_k) = 0$) mit mindestens zwei Ecken. Da solch ein Baum mindestens zwei Ecken besitzt, deren Ordnung 1 ist, erhalten wir aus §5, daß mindestens zwei der S_j affinoide Kreisscheiben sind.
Wir bezeichnen mit $d_j := ggt(n, \nu_{j1}) = ggt(n, \nu_{j2})$.

Wir wollen folgenden Satz beweisen:

Satz IV.1: C ist eine Mumford-Kurve vom Geschlecht

$$g = n(w - 1) - \sum_{j=1}^{w} d_j + 1$$

C besitzt eine Überdeckung aus $d_1 + \ldots + d_w$ gelochten Scheiben $\{ \overline{S}_{j1}, \ldots, \overline{S}_{jd_j} ; j = 1, \ldots, w \}$, die jeweils den Rang $nd_j^{-1}r_j$ haben.

Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten.
Wir können annehmen, daß O kein kritischer Punkt ist und der Punkt '∞' nur in S_w liegt. Außerdem sei $O \notin S_w$. Durch entsprechende gebrochen lineare Transformationen läßt sich dies immer erreichen, ohne daß die Bedingungen (i), (ii), (iii) dadurch verändert werden.

Für die Betrachtungen von $\pi_x^{-1}(S_w)$ müssen wir dann nur zu dem Polynom in $\frac{1}{x}$:

$$Y^n := (\text{const.}\ \frac{Y}{x^u})^n = \prod_{j=1}^{m} (\frac{1}{a_j} - \frac{1}{x})^{\nu_j}$$

übergehen, ansonsten läßt sich alles auf den folgenden Fall zurückführen.

Sei S eine der gelochten Scheiben $S_1, \ldots, S_{w-1}$ vom Rang r und a_1, a_2 seien die kritischen Punkte, die in S liegen. Die Linearfaktoren $(x - a_1)$ bzw. $(x - a_2)$ seien in P(x) mit der Vielfachheit ν bzw. $n - \nu$ vertreten. Sei weiter $d := ggt(n, \nu)$.

Wir stellen zuerst fest, daß $Q(x) := P(x)(x - a_1)^{-\nu}(x - a_2)^{-(n-\nu)}$ auf S eine n-te Wurzel W besitzt. Lemma 9.4 (2) zeigt, daß die Verteilung der kritischen Punkte so gewählt ist (insbesondere (ii)), daß ein W mit $W^n = Q$ auf S existiert.

Satz IV.2: $\bar{S} := \pi_x^{-1}(S)$ ist die disjunkte Vereinigung von paarweise isomorphen gelochten Scheiben $\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_d$ vom Rang $nd^{-1}r$.

Beweis: Wir können annehmen, daß A(S) die Form

$$A(S) = k(x, \frac{\varepsilon_1}{x}, \ldots, \frac{\varepsilon_{r-1}}{x - b_{r-1}})$$

hat. Das Minimalpolynom der Körpererweiterung $k(x, y) : k(x)$ ist

$$y^n = (x - a_1)^{\nu}(x - a_2)^{n-\nu} \cdot Q(x).$$

Wir setzen

$$z := y^{nd^{-1}}(x - a_1)^{-\nu d^{-1}}(x - a_2)^{-(n-\nu)d^{-1}}$$

und definieren für $1 \leq l \leq d$ $(z^d = Q(x))$:

$$\bar{S}_l := \{P_c \in \pi_x^{-1}(c),\ c \in S \mid z(P_c) = \rho^{l-1}Q(c)^{d^{-1}}\}$$

für eine primitive n-te Einheitswurzel ρ. Offenbar gehört jeder Punkt aus $\bar{S}$ zu genau einem $\bar{S}_l$. $\bar{S}$ ist die disjunkte Vereinigung von $\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_d$. Ist $c \in S$ kein kritischer Punkt von π_x, so besteht $\pi_x^{-1}(c)$ aus den Punkten $P_c^1, \ldots, P_c^n$ und $y(P_c^i) = \rho^{i-j}y(P_c^j)$.

$y^{nd^{-1}}$ (und daher auch z) nimmt in den Punkten P_c^i, P_c^j genau dann denselben Wert an, wenn $i \equiv j$ (d) ist. Zu jedem $\bar{S}_1$ gehören daher nd^{-1} Punkte der Faser $\pi^{-1}(c)$. Die Faser über a_i, $i = 1, 2$, besteht aus genau d Punkten, wovon offensichtlich jeder genau einem $\bar{S}_1$ angehört.

Jedes $\bar{S}_1$ ist das Bild von $\bar{S}_1$ unter einem Galoisautomorphismus $C : \mathbb{P}^1_k(x)$, da $Gal(k(x, y) : k(x))$ die zyklische Gruppe der Ordnung n ist.

Wir müssen somit nur nachweisen, daß $\bar{S}_1$ eine gelochte Scheibe vom Rang $nd^{-1}r$ ist.

Wir setzen $y' := yW^{-d}$ und erhalten auf $\bar{S}_1$:

$$y'^{nd^{-1}} = (x - a_1)^{\nu d^{-1}} (x - a_2)^{(n-\nu)d^{-1}}.$$

Da $(nd^{-1}, \nu d^{-1}) = 1$ ist, gibt es ganze Zahlen r, s, so daß

$$r \cdot nd^{-1} + s \cdot \nu d^{-1} = 1$$

ist. Es folgt sofort $(nd^{-1}, s) = 1$ für alle Lösungen r, s der linearen diophantischen Gleichung. Da die Gesamtheit aller Lösungen

$$s_m = s + mnd^{-1}$$
$$r_m = r - m\nu d^{-1}, \; m \in \mathbb{Z},$$

ist, finden wir sicher ein $m \in \mathbb{Z}$ aufgrund der Teilerfremdheit von s_m und nd^{-1}, so daß $(s_m, n) = 1$ ist (z.B. durch Betrachtungen endlich vieler Kongruenzen, die durch die Primfaktoren von n gegeben sind).
Sei also $(nd^{-1}, s) = (n, s) = 1$.

Wir setzen

$$t := \left(\frac{y'}{x - a_2}\right)^s \left(\frac{x - a_1}{x - a_2}\right)^r$$

und erhalten

$$t^{nd^{-1}} = \frac{x - a_1}{x - a_2}.$$

Da $(n, s) = 1$ ist, nimmt t in den $\frac{n}{d}$ Punkten von $\bar{S}_1$, die in $\pi_x^{-1}(c)$ liegen, wobei $c \neq a_i$ ist, P_c^j, $j = 1, d + 1, \ldots, (\frac{n}{d}) - 1)d + 1$, die paarweise verschiedenen Werte

$$\rho^{s(j-1)}\left(\frac{c - a_1}{c - a_2}\right)^{n^{-1}d} \quad \text{an.}$$

Der Einfachheit halber können wir jetzt annehmen, daß $d = 1$, also $\bar{S}_1 = \bar{S}$ und damit $t^n = \frac{x - a_1}{x - a_2}$ ist. Wir erhalten dann

$$x = \frac{t^n a_2 - a_1}{t^n - 1}.$$

Wir zeigen, daß $\bar{S}$ eine gelochte Scheibe in $\mathbb{P}_k^1(t)$ ist.

$\bar{S}$ läßt sich durch die Funktion t wie folgt beschreiben:

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a_2 - a_1}{t^n - 1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\prod_{j=1}^{n}(t - \rho^j)\right| \geq |a_2 - a_1|,$$

das gilt genau dann, wenn

$$(o) \qquad |t - \rho^j| \geq |a_2 - a_1|$$

ist für alle j, da $|a_2 - a_1| < 1$ und wegen der Voraussetzung an die Restklassencharakteristik $|\rho^{j'} - \rho^j| = 1$ ist für $j' \neq j$.

Ebenso erhalten wir für $0 < i \leq r - 1$:

$$\left|\frac{\varepsilon_i}{x - b_i}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\frac{a_1 - a_2}{\varepsilon_i(a_2 - b_i)^2}}{t^n - \frac{a_1 - b_i}{a_2 - b_i}}\right| \leq 1.$$

Setzen wir $\beta_i := \frac{a_1 - b_i}{a_2 - b_i}$, $\alpha_i := \varepsilon_i \frac{a_1 - a_2}{(a_2 - b_i)^2}$ und

$\delta_i := \alpha_i \cdot \beta_i^{(1-n)n^{-1}}$, so gilt die obige Abschätzung genau

dann, wenn $|\prod_{j=1}^{n} (t - \rho^j \beta_i^{n^{-1}})| \geq |\alpha_i|$ ist, was mit

$$(i) \qquad |t - \rho^j \cdot \beta_i^{n^{-1}}| \geq |\delta_i|$$

für alle j gleichwertig ist.

Da $|\delta_i| < |\beta_i^{n^{-1}}|$ ist ($|\frac{\varepsilon_i}{a_2 - b_i}| < 1$!), wird durch die Beziehung (i) in $\mathbb{P}_k^1(t)$ eine Scheibe vom Rang n beschrieben.

Die Ungleichungen (0), (1),..., (r - 1) stellen eine gelochte Scheibe T im $\mathbb{P}_k^1(t)$ vom Rang nr dar. Da die Gleichheitszeichen in (0) bzw. (i) genau dann gelten, wenn $|\frac{\varepsilon_i}{x - b_i}| = 1$ bzw. $|x| = 1$ ist, folgt die Eigenschaft, daß T eine gelochte Scheibe ist, daraus, daß S eine gelochte Scheibe ist.

Nun stimmen zwar $\bar{S}$ und T als Punktmengen überein, wir müssen aber noch zeigen, daß dies auch für die Algebren $A(\bar{S})$ und A(T) gilt. Deshalb weisen wir nach, daß in jedem Punkt $P_c \in \bar{S}$ entweder t^{-1} oder $t - B_c$ für eine Konstante $B_c \in k$ eine lokale Koordinate ist, dort also eine einfache Nullstelle besitzt. Ist dies der Fall, so folgt aus [5], §4, Corollary 2, die Behauptung $A(\bar{S}) = A(T)$.

Wir wissen bereits, daß $x - a_1$ bzw. $x - a_2$ eine n-fache Nullstelle in $P_1 := \pi^{-1}(a_1)$ bzw. $P_2 := \pi^{-1}(a_2)$ hat.

Aus $t^n = \frac{x - a_1}{x - a_2}$ folgt sofort, daß t in P_1 und t^{-1} in P_2 eine einfache Nullstelle besitzt.

Sei nun $c \in S$, $c \neq a_i$. Wir haben

$$\prod_{j=1}^{n} (t - \rho^j \left(\frac{c - a_1}{c - a_2}\right)^{n^{-1}}) = \frac{x - a_1}{x - a_2} - \frac{c - a_1}{c - a_2} = (x-c) \cdot h(x)$$

mit $h(c) \neq 0$. Die Funktion $x - c$ uniformisiert die Stellen $P_c^1, \ldots, P_c^n$ nach der Bemerkung 2 am Anfang dieses Kapitels. Da $(n, s) = 1$ ist, durchläuft ρ^{sj} für $j = 1, \ldots, n$ alle n-ten Einheitswurzeln. Somit nimmt t, da der erzeugende Galoisautomorphismus y nach ρy überführt, in P_c^j den Wert $\rho^{sj}\left(\frac{c - a_2}{c - a_1}\right)^{n^{-1}}$ an, also besitzt $t - \rho^{sj}\left(\frac{c - a_2}{c - a_1}\right)^{n^{-1}}$ in P_c^j eine einfache Nullstelle.

Die angegebene Überdeckung von C durch gelochte Scheiben ist offenbar eine Überdeckung, die den Bedingungen von Satz II.2 genügt.

Um den Satz IV.1 vollständig zu beweisen, müssen wir noch das algebraische Geschlecht der Kurve C ausrechnen. Wir bestimmen das topologische Geschlecht, das mit dem algebraischen nach Kap. III übereinstimmt. Wir stellen folgendes fest:

(1) Der Überdeckungsgraph $\mathfrak{G}$ zu der im Satz IV.1 angegebenen Überdeckung enthält $\sum_{j=1}^{w} d_j$ Ecken, also einen maximalen Baum mit $\sum_{j=1}^{w} d_j - 1$ Kanten.

(2) Der Überdeckungsgraph zu der Überdeckung $\{S_1, \ldots, S_w\}$ des $\mathbb{P}_k^1$ enthält w Ecken und, da er ein Baum ist, $w - 1$ Kanten. Da über jedem Rand eines S_j nach dem Beweis zu IV.2 n disjunkte Ränder von $\overline{S}_{j1}, \ldots, \overline{S}_{jd_j}$ liegen, besitzt $\mathfrak{G}$ $n(w-1)$ Kanten.

Somit folgt für die zyklomatische Zahl q von $\mathfrak{G}$

$$q = n(w - 1) - \sum_{j=1}^{w} d_j + 1.$$

Sind insbesondere alle ν_j teilerfremd zu n, so gilt

$$q = (n - 1)(w - 1).$$

Da das Verzweigungsverhalten von π_x zahm ist, können wir das Geschlecht von C auch mit der Formel von Hurwitz ([14] , IV, 2, Cor. 2.4) bestimmen, was unsere Aussagen hier bestätigt.

Beispiele:

Sei $P(x) = x^{21} + \ldots + a_{2j}x^{2j} + \ldots + a_0$ ein Polynom in x, $1 > 1$, $0 \leq j \leq 1$, mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $|a_0| = |a_2|$ und

$$|a_{2j}|^2 > |a_{2(j-1)} \cdot a_{2(j+1)}|$$

für $j = 1,\ldots,1-1$ ist.

Aus der Symmetrie des Polynoms und [13] , Satz 7', folgt leicht, daß P(x) in $\pm n_1,\ldots, \pm n_1$ mit $1 = |n_1| < |n_2| < \ldots < |n_1|$ Nullstellen besitzt.

1) $y^2 = p(x)$ ist eine Mumford-Kurve vom Geschlecht $g = 1 - 1$.

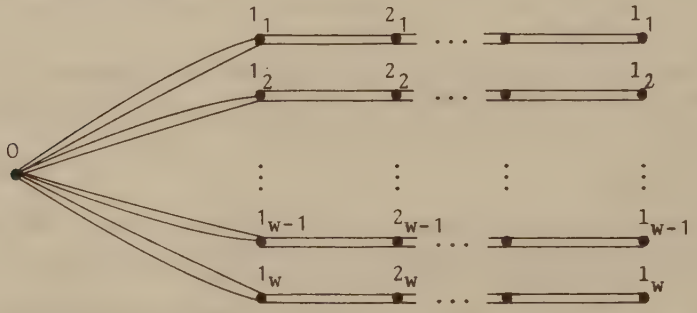
Wir finden eine Überdeckung des $\mathbb{P}^1_k$ aus zwei Kreisscheiben und 1 - 2 einfach gelochten Scheiben, so daß die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt sind mit dem Überdeckungsbaum

Der Überdeckungsgraph der gelifteten Überdeckung aus IV.1 ist

2) $y^{2w} = x(x - \varepsilon)^{w-1}p^w(x)$ ist für $w > 1$, $|\varepsilon| < 1$, eine Mumford Kurve vom Geschlecht $g = w1$.

Wir nehmen als Überdeckung des $\mathbb{P}^1_k$ zwei affionide Kreisscheiben S_o und S_1, die eine enthält die Punkte 0, ε, die andere $+n_1$, $-n_1$ und $1-1$ einfach gelochte Scheiben S_i, von denen jede ein Nullstellenpaar n_i, $-n_i$, $1 \leq i \leq 1-1$ enthält. Die Bedingungen (i), (ii) und (iii) sind erfüllt. Wir erhalten den Überdeckungsbaum

Der Überdeckungsgraph der gelifteten Überdeckung von C nach IV.1 hat dann die Form



Schlußbemerkung: Fordert man nicht, daß die Restklassencharakteristik von k n nicht teilt, sondern nur, daß die Charakteristik von k kein Teiler von n ist, so lassen sich alle Aussagen in leicht modifizierter Form ebenfalls beweisen. Es reicht allerdings nicht, die kritischen Punkte nur durch eine affinoide Überdeckung zu trennen, es kommt ein metrisches Kriterium hinzu, daß die kritischen Punkte 'weit genug' auseinanderliegen, um noch Wurzeln ziehen können.

Ebenso möchte ich noch darauf hinweisen, daß sich mit etwas weitergehenden Überlegungen sicherlich beweisen läßt, daß das angegebene hinreichende Kriterium für die Verteilung der kritischen Punkte auch notwendig ist.

Literaturverzeichnis

[1] Bosch, S.: Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Manuscripta Math., Vol. 1 (1969).

[2] Bosch, S.: Homogene Räume k-affinoider Gruppen, Inventiones math. 19, 165-218 (1973).

[3] Bosch, S.: Formelle Standardmodelle hyperelliptischer Kurven, Math. Ann. 251, 19-42 (1980).

[4] Chevalley, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable, Mathematical Surveys Number VI, Americans Mathematical Society (1951).

[5] Gerritzen, L.: On One-dimensional Affionid Domains and Open Immersions, Inventiones math. 5, 106-119 (1968).

[6] Gerritzen, L.: Zur nichtarchimedischen Uniformisierung von Kurven, Math. Ann. 210, 310-337 (1974).

[7] Gerritzen, L.: Unbeschränkte Steinsche Gebiete von $\mathbb{P}_1$ und nichtarchimedische automorphe Formen, J. reine angew. Math. 297, 21-34 (1978).

[8] Gerritzen, L./Grauert, H.: Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press, Princeton University Press 1970.

[9] Gerritzen, L./van der Put, M.: Schottky Groups and Mumford Curves, Lecture Notes in Mathematics, 817, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[10] Grauert, H.: Affinoide Überdeckungen eindimensionaler affininoider Räume, IHES N° 34 (1968).

[11] Grauert, H./Remmert, R.: Nichtarchimedische Funktionentheorie, Arbeitsgem. für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Band 33, 393-476, Westdeutscher Verlag (1966).

[12] Grauert, H./Remmert, R.: Über die Methode der diskret-bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inventiones math. 2, 87-133 (1966).

[13] Güntzer, U.: Zur Funktionentheorie einer Veränderlichen über einem vollständigen nichtarchimedischen Grundkörper, Arch. Math., Vol. XVII, 415-431 (1966).

[14] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag (1977).

[15] Herrlich, F.: Über Automorphismen p-adischer Schottkykurven, Dissertation, Bochum 1978.

[16] Kiehl, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inventiones math. 2, 119-214 (1967).

[17] Kiehl, R.: Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inventionens math. 2, 256-273 (1967).

[18] Mumford, D.: An analytic construction of degenerating curves over complete local fields, Comp. Math. 24, 129-172 (1972).

[19] Nagata, M.: Local Rings, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 13, Interscience Publishers (1962).

[20] Reidemeister, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie,Vieweg,Braunschweig (1932).

[21] Roquette, P.: Analytic theory of elliptic functions over local fields, Hamburger Math. Einzelschriften, Neue Folge, Heft 1, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1970).

[22] Ullrich, H.: Universelle Überlagerungen von Grothendiecktopologien, Diplomarbeit Frankfurt/M. (1976).

[23] Schottky, F.: Über eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt, J. reine angew. Math. 101, 227-272 (1887).

[24] Serre, J. P.: Local Fields,Graduate Texts in Mathematics, 67, Springer-Verlag (1979).

[25] Tate, J.: Rigid Analytic Spaces, Inventiones math. 12, 257-289 (1971).

Lebenslauf

17.8.1952	geboren in Oberissigheim (jetzt Bruchkoebel) im Main-Kinzig-Kreis in Hessen
1959-1963	Besuch der Volksschule in Oberissigheim
1963-1971	Gymnasialzeit an der Hohen Landesschule in Hanau am Main, abgeschlossen am
14.6.1971	mit dem Abitur
1971-1976	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Johann-Wolfgang-Goethe--Universität Frankfurt am Main, abgeschlossen am
7.12.1976	mit dem Diplom in Mathematik.

DER DRUCKER - Buscheystraße 138 - 4630 Bochum - Tel. (02 34) 70 41 16